RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 maggio 1917.

A. Ròiti, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Rappresentazioni normali uniformi e sistemi di Weingarten.* Nota del Socio Luigi Bianchi.

1. In una mia Nota inserita nel vol. XXV di questi Rendiconti (seduta del 6 febbraio 1916), ho posto il concetto di *rappresentazioni normali uniformi* di due spazii qualunque S_n, S'_n, di egual numero n di dimensioni, l'uno sull'altro; e nel caso che i due spazii abbiano curvature costanti K, K' (differenti od eguali) ho dimostrato che esistono infinite rappresentazioni della specie, dipendenti da $n(n-1)$ funzioni arbitrarie. Ogni tale rappresentazione dà luogo a due sistemi n^{pli} ortogonali, l'uno nello spazio S_n, l'altro nelle spazio S'_n, che diciamo i sistemi principali della rappresentazione, le loro linee coordinate seguendo in ogni punto una delle n direzioni principali.

La ricerca di questi notevoli sistemi n^{pli} ortogonali, nell'ipotesi che *i moduli principali di dilatazione* $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_n$ *siano costanti diseguali*, viene a dipendere dal sistema di equazioni a derivate parziali stabilito al n. 5 della Nota [sistema (B)], che lega i coefficienti H_i del ds^2

$$ds^2 = H_1^2\, du_1^2 + H_2^2\, du_2^2 + \cdots + H_n^2\, du_n^2$$

e le corrispondenti rotazioni β_{ik}. Se si pone

$$c_1 = \frac{1}{\mu_1^2}\,,\quad c_2 = \frac{1}{\mu_2^2}\,,\dots,\quad c_n = \frac{1}{\mu_n^2}\,,$$

questo sistema differenziale fra le H_i e le β_{ik} si scrive:

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} H_k \quad , \quad \dfrac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il}\beta_{lk} \\ \dfrac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} = \sum_{\lambda}^{(i,k)} \dfrac{c_k - c_\lambda}{c_i - c_k}\beta_{\lambda i}\beta_{\lambda k} + \dfrac{Kc_k - K'}{c_i - c_k} H_i H_k \ (^1). \end{cases}$$

Le (I) formano un sistema di Bourlet-Darboux *completamente integrabile*, e la sua soluzione generale comprende quindi $n(n-1)$ funzioni arbitrarie.

L'integrazione effettiva del sistema (I) è un problema manifestamente molto complicato in generale; però dimostreremo che anche qui, come in tante altre questioni di analisi applicata alla geometria, si possono stabilire dei metodi ricorrenti che, partendo da una soluzione nota, permettono di trovarne infinite nuove coll'integrazione di equazioni differenziali ordinarie. E spingendo più in là la ricerca si potrebbe dimostrare un *teorema di permutabilità* che permette di risparmiare ogni integrazione.

2. L'accennato metodo *d'integrazione successiva* del sistema (I) dipende geometricamente dalle *trasformazioni di Ribaucour* per inviluppi di ipersfere dei sistemi n^{pli} ortogonali. Per le formole relative a queste trasformazioni mi riporto all'altra Nota nello stesso volume dei Rendiconti (19 marzo 1916), le formole ivi stabilite per lo spazio S_n euclideo valendo ancora nel caso generale con leggiere modificazioni, dovute alla curvatura dello spazio.

Abbiasi nello spazio S_n, di curvatura costante K, un sistema n^{plo} ortogonale (Σ), definito dalla corrispondente forma del ds^2

$$(2)\qquad ds^2 = H_1^2 du_1^2 + H_2^2 du_2^2 + \cdots + H_n^2 du_n^2 .$$

I coefficienti H_i e le relative rotazioni β_{ik} sono legati dalle equazioni caratteristiche:

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} H_k \quad , \quad \dfrac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il}\beta_{lk} \\ \dfrac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + \dfrac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \beta_{\lambda i}\beta_{\lambda k} + K H_i H_k = 0 . \end{cases}$$

Ora le trasformazioni di Ribaucour per inviluppi di ipersfere dei sistemi n^{pli} ortogonali (Σ) in altri sistemi (Σ') derivati corrispondono biunivocamente ai sistemi di $n+1$ funzioni

$$\gamma_1 , \gamma_2 , \cdots , \gamma_n , \varphi ,$$

(1) Per il significato delle segnature veggasi la Nota citata.

che diremo le *funzioni trasformatrici*, assoggettate a soddisfare al sistema differenziale

$$(4) \qquad \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik}\,\gamma_k \quad , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = \mathrm{H}_i\,\gamma_i \,,$$

sistema che ammette soluzioni dipendenti da n funzioni arbitrarie. Scelta una soluzione $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n; \varphi)$ delle (4), dal sistema (Σ) supposto noto si avrà *in termini finiti* il sistema (Σ') derivato con formole che non occorre qui trascrivere. Solo importa osservare che la relazione fra $(\Sigma), (\Sigma')$ è involutoria, onde avremo n funzioni trasformatrici $\bar\gamma_1, \bar\gamma_2, \dots, \bar\gamma_n, \bar\varphi$ pel passaggio inverso da (Σ') a (Σ), e *queste sono date dalle semplici formole* (ibi, n. 4):

$$(5) \qquad \bar\gamma_1 = \varrho\gamma_1 \quad , \quad \bar\gamma_2 = \varrho\gamma_2, \dots, \bar\gamma_n = \varrho\gamma_n \quad , \quad \bar\varphi = -\varrho\varphi \,,$$

con ϱ fattore di proporzionalità (funzione delle u_i).

3. Ciò premesso, dimostriamo che si arriva allo stesso sistema fondamentale (I) proponendosi la questione seguente:

Quali sono i sistemi n^{ple} *ortogonali* (Σ) *dello spazio* S_n, *a curvatura costante* K, *che ammettono trasformazioni di Ribaucour colle funzioni trasformatrici* $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n; \varphi$ *legate da un'identità quadratica*

$$(6) \qquad c_1\gamma_1^2 + c_2\gamma_2^2 + \cdots + c_n\gamma_n^2 + \mathrm{K}'\varphi^2 = \text{cost.} \,,$$

dove $c_1, c_2, \dots, c_n, \mathrm{K}'$ *sono costanti, le prime n inoltre differenti da zero e fra loro?*

Avvertiamo che qui ed in seguito escluderemo sempre i casi, di più ovvia trattazione, noi quali si annulli qualche rotazione β_{ik}. Ora dalla (6), derivata rapporto ad una qualunque u_i, abbiamo

$$\gamma_i \left\{ c_i \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_{\lambda}^{(i)} c_\lambda\,\beta_{\lambda i}\,\gamma_\lambda + \mathrm{K}'\,\mathrm{H}_i\,\varphi \right\} = 0 \,,$$

ed essendo $\gamma_i \neq 0$, ne dedurremo le

$$(4') \qquad c_i \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_{\lambda}^{(i)} c_\lambda\,\beta_{\lambda i}\,\gamma_\lambda + \mathrm{K}'\,\mathrm{H}_i\,\varphi = 0$$
$$(i = 1, 2, \dots, n) \,.$$

Aggregando queste n equazioni alle (4), dobbiamo esaminare le relative condizioni d'integrabilità

$$c_i \frac{\partial}{\partial u_i}(\beta_{ik}\,\gamma_k) + \frac{\partial}{\partial u_k} \sum_{\lambda}^{(i)} c_\lambda\,\beta_{\lambda i}\,\gamma_\lambda + \mathrm{K}' \frac{\partial}{\partial u_k}(\mathrm{H}_i\,\varphi) = 0 \,,$$

che possiamo scrivere

$$c_i \frac{\partial}{\partial u_i}(\beta_{ik}\gamma_k) + c_k \frac{\partial}{\partial u_k}(\beta_{ki}\gamma_k) + \frac{\partial}{\partial u_k}\sum_{\lambda}^{(i,k)} c_\lambda \beta_{\lambda i}\gamma_\lambda + K' \frac{\partial}{\partial u_k}(H_i \varphi) = 0 .$$

Eseguendo le derivazioni colle (4), (3) e raccogliendo i termini che contengono γ_k, otteniamo:

$$(7) \qquad \gamma_k \left\{ c_i \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + c_k \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i,k)} c_\lambda \beta_{\lambda i}\beta_{\lambda k} + K' H_i H_k \right\} + \Omega = 0 ,$$

avendo posto

$$\Omega = c_i \beta_{ik}\beta_{ki}\gamma_i + \beta_{ki} c_k \frac{\partial \gamma_k}{\partial u_k} + \beta_{ki} \sum_{\lambda}^{(i,k)} c_\lambda \beta_{\lambda k}\gamma_\lambda + K' \beta_{ki} H_k \varphi ,$$

ed anche

$$\Omega = \beta_{ki} \left\{ c_k \frac{\partial \gamma_k}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i,k)} c_\lambda \beta_{\lambda k}\gamma_\lambda + K' H_k \varphi \right\} .$$

Ora per la (4') è $\Omega = 0$, indi la (7) resta

$$c_i \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + c_k \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i,k)} c_\lambda \beta_{\lambda i}\beta_{\lambda k} + K' H_i H_k = 0 ,$$

e questa, combinata colla (3) della seconda linea, ci dà

$$\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} = \sum_{\lambda}^{(i,k)} \frac{c_k - c_\lambda}{c_i - c_k} \beta_{\lambda i}\beta_{\lambda k} + \frac{K c_k - K'}{c_i - c_k} H_i H_k ,$$

che è precisamente l'equazione della seconda linea nel sistema (I). Adunque se le funzioni trasformatrici $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \varphi$ sono legate dall'identità quadratica (6), il sistema n^{plo} ortogonale (Σ) appartiene necessariamente alla classe caratterizzata dal sistema differenziale (I).

4. Viceversa, se il sistema (Σ) appartiene a questa classe, aggregando le (4') alle (4), si ha il sistema di equazioni lineari ai differenziali totali per le funzioni incognite $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \varphi$:

$$(II) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik}\gamma_k \quad , \quad \dfrac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} = -\sum_{\lambda}^{(i)} \dfrac{c_\lambda}{c_i}\beta_{\lambda i}\gamma_\lambda - \dfrac{K' H_i \varphi}{c_i} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_i} = H_i \gamma_i . \end{cases}$$

Ora il calcolo stesso sopra eseguito dimostra che, a causa delle (I), questo è un sistema completamente integrabile, ed ammette l'integrale quadratico (6). La sua soluzione generale contiene quindi $n+1$ costanti arbitrarie per le quali possiamo assumere i valori iniziali $\gamma_i^{(0)}, \varphi^{(0)}$ delle fun-

zioni trasformatrici per un sistema iniziale $u_i^{(0)}$ di valori delle variabili indipendenti.

Ora di più scegliamo i valori iniziali $\gamma_i^{(0)}$, $\varphi^{(0)}$ per modo che *si annulli nella* (6) *la costante del secondo membro*, indi si abbia [1]

$$(II^*) \qquad c_1 \gamma_1^2 + c_2 \gamma_2^2 + \cdots + c_n \gamma_n^2 + K' \varphi^2 = 0 .$$

Applicando allora al sistema (Σ) la corrispondente trasformazione $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n ; \varphi)$ di Ribaucour, è facile vedere che il sistema derivato (Σ') apparterrà alla medesima classe. Ed infatti le funzioni trasformatrici $\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, \ldots, \overline{\gamma}_n ; \overline{\varphi}$ nel passaggio inverso da (Σ') a (Σ) soddisferanno ancora, per le (5), alla relazione quadratica (II*) che caratterizza, come si è visto, i sistemi n^{pli} ortogonali (Σ) corrispondenti alle formole (I). Concludiamo quindi:

Nota una rappresentazione normale uniforme di uno spazio S_n *a curvatura costante* K *sopra un altro spazio* S'_n *di curvatura costante* (*negativa*) K', *se ne ottengono infinite nuove integrando il sistema lineare ai differenziali totali* (II), *colla condizione* (II*) *ai limiti.*

5. Nei risultati ottenuti è essenziale l'ipotesi che i moduli di dilatazione siano tutti diversi e resta a vedersi quali modificazioni vi si introducono per l'eguaglianza di due o più dei moduli.

Limitiamo qui la ricerca al caso $n = 3$ degli spazii a tre dimensioni, sempre escludendo i casi di più facile trattazione in cui si annulli qualche β_{ik}, chè allora nel sistema triplo una famiglia è composta di superficie parallele e le altre due di sviluppabili. Siano

$$\begin{cases} ds^2 = H_1^2 du_1^2 + H_2^2 du_2^2 + H_3^2 du_3^2 \\ ds^2 = a^2 H_1^2 du_1^2 + a^2 H_2^2 du_2^2 + c^2 H_3^2 du_3^2 \end{cases}$$

i due elementi lineari di S_3, S'_3, le costanti a^2, c^2 essendo supposte naturalmente diseguali.

Indicando con accenti le quantità relative al secondo spazio. si ha

$$H'_1 = a H_1 , \quad H'_2 = a H_2 , \quad H'_3 = c H_3 ,$$

e conseguentemente

$$\beta'_{12} = \beta_{12} , \ \beta'_{21} = \beta_{21} ; \ \beta'_{13} = \frac{c}{a} \beta_{13} , \ \beta'_{23} = \frac{c}{a} \beta_{23} ; \ \beta'_{31} = \frac{a}{c} \beta_{31} , \ \beta'_{32} = \frac{a}{c} \beta_{32} .$$

[1] Si avvertirà che se il sistema (Σ) corrisponde ad una rappresentazione normale uniforme di S_n sopra S'_n, le costanti c_i sono per le (1) tutte positive, e per ciò deve essere $K' < 0$, ossia lo spazio S'_n deve essere pseudosferico.

Se scriviamo l'equazione della terza linea in (3) per lo spazio S_3

$$\frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} + \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} + \beta_{31}\beta_{32} + K H_1 H_2 = 0 ,$$

insieme all'analoga per S_3'

$$\frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} + \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} + \frac{a^2}{c^2}\beta_{31}\beta_{32} + K' a^2 H_1 H_2 = 0 ,$$

sottraendo abbiamo

$$\left(\frac{a^2}{c^2} - 1\right)\beta_{31}\beta_{32} = (K - K' a^2) H_1 H_2 ,$$

indi

$$\frac{\beta_{31}\beta_{32}}{H_1 H_2} = \frac{c^2 (K - K' a^2)}{a^2 - c^2} .$$

Ora il primo membro rappresenta appunto la curvatura totale *relativa* k_0 delle superficie $u_3 = \text{cost.}$, cioè il prodotto delle due curvature principali

$$\frac{1}{r_{31}} = \frac{\beta_{31}}{H_1} , \quad \frac{1}{r_{32}} = \frac{\beta_{32}}{H_2} ,$$

e la formola ottenuta si scrive

$$k_0 = \frac{c^2 (K - K' a^2)}{a^2 - c^2} . \tag{8}$$

La famiglia $u_3 = \text{cost.}$ nel sistema triplo ortogonale è formata dunque di superficie colla medesima curvatura costante, cioè:

In qualunque rappresentazione normale uniforme di due spazii a tre dimensioni ed a curvatura costante, l'uno sull'altro, quando due dei moduli di dilatazione sono eguali, il sistema triplo ortogonale principale é un sistema di Weingarten.

Si vede così come si presentano spontaneamente i sistemi di Weingarten in questi problemi geometrici di rappresentazione. Dalle mie antiche ricerhe su questi sistemi [1] è facile d'altronde dedurre inversamente che: *Ogni sistema di Weingarten in uno spazio a curvatura costante è il sistema principale in una rappresentazione normale uniforme di questo spazio sopra un altro spazio di curvatura costante.*

6. Siamo ricondotti ancora ai sistemi di Weingarten trattando la questione seguente, corrispondente a quella del n. 3, ove si suppongono eguali due delle costanti c_i:

[1] Annali di matematica, tomo XIII della serie 2ª (1885) e Memorie dei Lincei, vol. IV, serie 4ª (1887).

Quali sono i sistemi tripli ortogonali dello spazio S_3, *di curvatura costante* K, *che ammettono trasformazioni di Ribaucour, colle funzioni trasformatrici* $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \varphi$ *legate da un'identità quadratica della forma*

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + a\gamma_3^2 + b\varphi^2 = 0, \tag{9}$$

con a, b *costanti?*

Questa, derivata rapporto ad u_1, u_2, u_3, osservando le (4), dà

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \gamma_1}{\partial u_1} + \beta_{21}\gamma_2 + a\beta_{31}\gamma_3 + b\,H_1\varphi = 0 \\ &\frac{\partial \gamma_2}{\partial u_2} + \beta_{12}\gamma_1 + a\beta_{32}\gamma_3 + b\,H_2\varphi = 0 \\ &a\frac{\partial \gamma_3}{\partial u_3} + \beta_{13}\gamma_1 + \beta_{23}\gamma_2 + b\,H_3\varphi = 0. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Paragonando la prima di queste coll'altra $\frac{\partial \gamma_1}{\partial u_2} = \beta_{12}\gamma_2$, ne deduciamo

$$\frac{\partial}{\partial u_1}(\beta_{12}\gamma_2) + \frac{\partial}{\partial u_2}(\beta_{21}\gamma_2) + a\frac{\partial}{\partial u_2}(\beta_{31}\gamma_3) + b\frac{\partial}{\partial u_2}(H_1\varphi) = 0,$$

che sviluppata colla precedente diventa

$$\frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} + \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} + a\beta_{31}\beta_{32} + b\,H_1H_2 = 0.$$

D'altra parte abbiamo anche

$$\frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} + \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} + \beta_{31}\beta_{32} + K\,H_1H_2 = 0,$$

indi sottraendo

$$(a-1)\beta_{31}\beta_{32} = (K-b)\,H_1H_2.$$

Ora, escludendo che si abbia $a = 1$, $b = K$, caso che per le trasformazioni di Ribaucour è privo di significato, ne deduciamo

$$k_0 = \frac{\beta_{31}\beta_{32}}{H_1H_2} = \frac{K-b}{a-1} = \text{cost.}, \tag{11}$$

e quindi: *I sistemi tripli ortogonali cercati debbono essere sistemi di Weingarten.*

E inversamente si può dimostrare che per ogni sistema di Weingarten esistono trasformazioni di Ribaucour le cui funzioni trasformatrici sono legate da un'identità quadratica (9), *una delle due costanti* a, b *restando arbitraria, e l'altra desumendosi dalla* (11).

Supponiamo ora in aggiunta di scegliere i valori iniziali (arbitrarii) di $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3; \varphi$ per modo che s'annulli la costante del secondo membro nella (9). Allora, per le (5), anche le funzioni trasformatrici $\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, \overline{\gamma}_3; \overline{\varphi}$ pel passaggio inverso soddisfano alla stessa condizione

$$\overline{\gamma}_1^2 + \overline{\gamma}_2^2 + a\overline{\gamma}_3^2 + b\overline{\varphi}^2 = 0,$$

e per ciò: *I sistemi tripli ortogonali derivati sono ancora sistemi di Weingarten colla stessa curvatura costante.*

7. Da ultimo vogliamo esaminare il caso particolare dei sistemi di Weingarten in uno spazio pseudosferico, la cui curvatura K si assumerà $= -1$, supponendo che la curvatura (relativa) k_0 delle $u_3 =$ cost. sia costante positiva e < 1, onde porremo

$$K = -1 \quad , \quad k_0 = \operatorname{sen}^2\sigma,$$

con σ angolo reale (1). Secondo le formole stabilite nella mia Memoria sopra citata del 1887, il ds^2 dello spazio avrà la forma

$$ds^2 = \cosh^2\theta\, du_1^2 + \operatorname{senh}^2\theta\, du_2^2 + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\sigma}\left(\frac{\partial\theta}{\partial u_3}\right)^2 du_3^2,$$

la funzione $\theta = \theta(u_1, u_2, u_3)$ essendo assoggettata a soddisfare al seguente sistema differenziale:

$$(A)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\theta}{\partial u_1^2} + \dfrac{\partial^2\theta}{\partial u_2^2} = \cos^2\sigma \operatorname{senh}\theta \cosh\theta \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1}\left(\dfrac{1}{\cosh\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u_1 \partial u_3}\right) = -\dfrac{1}{\operatorname{senh}\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u_2 \partial u_3}\dfrac{\partial\theta}{\partial u_2} + \cos^2\sigma \cosh\theta \dfrac{\partial\theta}{\partial u_3} \\ \dfrac{\partial}{\partial u_2}\left(\dfrac{1}{\cosh\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u_1 \partial u_3}\right) = \dfrac{1}{\operatorname{senh}\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u_2 \partial u_3}\dfrac{\partial\theta}{\partial u_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1}\left(\dfrac{1}{\operatorname{senh}\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u_2 \partial u_3}\right) = \dfrac{1}{\cosh\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u_1 \partial u_3}\dfrac{\partial\theta}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial u_2}\left(\dfrac{1}{\operatorname{senh}\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u_2 \partial u_3}\right) = -\dfrac{1}{\cosh\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u_1 \partial u_3}\dfrac{\partial\theta}{\partial u_1} + \cos^2\sigma \operatorname{senh}\theta \dfrac{\partial\theta}{\partial u_3}. \end{cases}$$

La soluzione generale di questo sistema contiene *quattro* funzioni arbitrarie, il che corrisponde geometricamente al fatto che per definire un tale sistema triplo ortogonale si può dare ad arbitrio: 1° una delle superficie

(1) Si osservi che la formola (8) diventa

$$K' = -\left(\frac{\cos^2\sigma}{a^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\sigma}{c^2}\right),$$

e però anche il secondo spazio S'_3 è pseudosferico.

$u_3 = \text{cost.}$ (a curvatura $k_0 = \text{sen}^2\sigma$); 2° una delle curve coordinate (u_3). Notiamo poi che il sistema (A) ammette l'integrale primo quadratico:

$$\text{(B)} \qquad \frac{1}{\cosh^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial u_1\,\partial u_3}\right)^2 + \frac{1}{\text{senh}^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial u_2\,\partial u_3}\right)^2 - \cos^2\sigma\left(\frac{\partial\theta}{\partial u_3}\right)^2 = \text{cost.}$$

Nel caso attuale la relazione (11) da porsi fra le costanti a, b al n. 7 diventa

$$b + \cos^2\sigma + a\,\text{sen}^2\sigma = 0$$

e viceversa dando qui ad a un qualunque valore (diverso però da $0, 1$) il sistema ai differenziali totali per $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3; \varphi$ formato dalle generali (4) e dalle (10) è completamente integrabile. Scelti i valori iniziali per modo che sia

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + a\gamma_3^2 + b\varphi^2 = 0,$$

il sistema (Σ') derivato per trasformazione di Ribaucour sarà un nuovo sistema di Weingarten colla stessa curvatura costante (n. 6).

8. Se si suppone nulla la costante del secondo membro nella relazione (B), si ha una classe particolare molto notevole di questi sistemi di Weingarten, pei quali

$$\frac{\beta_{13}^2 + \beta_{23}^2}{H_3^2} = \cos^2\sigma,$$

ossia $\dfrac{1}{\varrho_3} = \cos\sigma$, essendo $\dfrac{1}{\varrho_3}$ la flessione delle curve coordinate (u_3); si tratta qui adunque dei *sistemi di Weingarten a flessione costante*.

In tal caso il sistema differenziale (A) si semplifica coll'introduzione di una funzione ausiliaria ω e si scrive (cfr. Mem. cit.):

$$\text{(C)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta}{\partial u_1} + \dfrac{\partial\omega}{\partial u_2} = \cos\sigma\ \text{senh}\,\theta\,\cos\omega \quad , \quad \dfrac{\partial^2\theta}{\partial u_1\,\partial u_3} = \cos\sigma\cosh\theta\,\cos\omega\,\dfrac{\partial\theta}{\partial u_3} \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial u_2} - \dfrac{\partial\omega}{\partial u_1} = \cos\sigma\,\cosh\theta\,\text{sen}\,\omega \quad , \quad \dfrac{\partial^2\theta}{\partial u_2\,\partial u_3} = \cos\sigma\,\text{senh}\,\theta\,\text{sen}\,\omega\,\dfrac{\partial\theta}{\partial u_3} \end{cases}$$

Le trasformazioni di Ribaucour che abbiamo sopra considerato cangiano questi sistemi a flessione costante in altri della stessa specie.

Ora, mediante la rappresentazione conforme di Poincaré dello spazio pseudosferico ($K = -1$) sul semispazio $z > 0$ euclideo, definita dalla forma

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2}$$

pel ds^2, trasportiamo i sistemi (Σ) a flessione costante $\dfrac{1}{\varrho_3} = \cos\sigma$ nello

spazio euclideo. Le curve immagini coordinate (u_3) avranno la proprietà che i loro circoli osculatori taglieranno il piano limite $z = 0$ sotto l'angolo fisso σ, e le superficie immagini $u_3 = \text{cost.}$ saranno altrettanti integrali dell'equazione del 2° ordine (cfr. *Lezioni di geometria differenziale*, vol. I, § 222, formola (54):

$$(D) \qquad z^2 \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2} + z \frac{(1+q^2)\,r - 2pqs + (1+p^2)\,t}{(1+p^2+q^2)^2} + \\ + \frac{1}{1+p^2+q^2} = \operatorname{sen}^2 \sigma .$$

9. Suppongasi inversamente di avere, nell'ordinario spazio euclideo, un sistema triplo ortogonale (u_1, u_2, u_3) tale che i circoli osculatori delle curve coordinate (u_3) taglino sotto l'angolo costante σ $\left(0 < \sigma < \frac{\pi}{2}\right)$ un piano fisso, sia $z = 0$. In metrica iperbolica, questi sono circoli non euclidei a centro ideale o di curvatura geodetica $\cos\sigma$, onde le curve (u_3) hanno in questa metrica la flessione costante

$$\frac{1}{\varrho_3} = \cos\sigma .$$

Ora sussiste in generale il teorema:

Se in un sistema triplo ortogonale (u_1, u_2, u_3) *dello spazio* S_3, *a curvatura costante* K, *le curve* (u_3) *hanno la flessione costante* $\frac{1}{\varrho_3} = c$, *il sistema è di Weingarten, e la curvatura relativa* k_0 *della superficie* $u_3 = \text{cost.}$ *è data dalla formola*

$$(12) \qquad k_0 = -(K + c^2) .$$

Per ipotesi si ha

$$\beta_{13}^2 + \beta_{23}^2 = c^2 H_3^2 ,$$

e derivando rapporto ad u_1, u_2, osservando le formole

$$\frac{\partial \beta_{13}}{\partial u_2} = \beta_{12}\beta_{23} \quad , \quad \frac{\partial \beta_{23}}{\partial u_1} = \beta_{21}\beta_{13} ,$$

otteniamo le altre

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \beta_{13}}{\partial u_1} = c^2 H_1 H_3 - \beta_{21}\beta_{13} \\ \dfrac{\partial \beta_{23}}{\partial u_2} = c^2 H_2 H_3 - \beta_{12}\beta_{23} . \end{cases}$$

Paragonando colle precedenti, costruiamo la condizione d'integrabilità

$$\frac{\partial}{\partial u_1}(\beta_{12}\beta_{23}) + \frac{\partial}{\partial u_2}(\beta_{21}\beta_{13}) - c^2\frac{\partial}{\partial u_2}(H_1 H_3) = 0,$$

che sviluppata dà

$$\beta_{23}\left\{\frac{\partial\beta_{12}}{\partial u_1} + \frac{\partial\beta_{21}}{\partial u_2} - c^2 H_1 H_2\right\} +$$

$$+ \beta_{12}\beta_{23}\beta_{13} + \beta_{21}(c^2 H_2 H_3 - \beta_{12}\beta_{13}) - c^2\beta_{21} H_2 H_3 = 0.$$

I termini che non contengono β_{23} si elidono, e poichè $\beta_{23} \neq 0$ resta

$$\frac{\partial\beta_{12}}{\partial u_1} + \frac{\partial\beta_{21}}{\partial u_2} - c^2 H_1 H_2 = 0;$$

d'altronde

$$\frac{\partial\beta_{12}}{\partial u_1} + \frac{\partial\beta_{21}}{\partial u_2} + \beta_{31}\beta_{32} + K H_1 H_2 = 0$$

e paragonando

$$\beta_{31}\beta_{32} + (K + c^2) H_1 H_2 = 0,$$

che è precisamente la (12).

Se in questo risultato generale facciamo

$$K = -1 \quad , \quad c = \cos\sigma,$$

abbiamo $k_0 = \operatorname{sen}^2\sigma$, e perciò il sistema (u_1, u_2, u_3) dello spazio iperbolico è un sistema di Weingarten della classe considerata al n. 7, colla flessione costante $\frac{1}{\varrho_3} = \cos\sigma$.

Concludiamo quindi: *Esistono infinite famiglie di Lamé le cui trajettorie ortogonali hanno circoli osculatori che tagliano sotto un angolo costante σ un piano fisso. La loro ricerca dipende dal sistema* (C) *di equazioni a derivate parziali, la cui soluzione generale contiene tre funzioni arbitrarie.*

Si osservi che le superficie $u_3 = \text{cost.}$ di queste famiglie di Lamé sono tutte integrali dell'equazione del 2° ordine (D), del tipo di Monge-Ampère. E le superficie delle altre due famiglie $u_1 = \text{cost.}$, $u_2 = \text{cost.}$, che con la prima completano il sistema triplo ortogonale, hanno la proprietà che i circoli osculatori delle linee di curvatura di un sistema tagliano sotto l'angolo costante σ il piano $z = 0$. Come superficie isolate queste ultime furono studiate direttamente dal Razzaboni [1], con riferimento alle mie antiche ricerche sopra citate, ma nel caso opposto a quello sopra considerato, e cioè quando i circoli osculatori non tagliano realmente il piano fisso (σ puramente immaginario).

[1] Memorie della R. Accademia di Bologna, serie VII, tomo I (1913).

Meccanica. — *Statica einsteiniana.* Nota del Socio T. Levi-Civita.

Mi propongo di studiare sia quel caso particolare delle equazioni gravitazionali di Einstein, che corrisponde a fenomeni statici, sia (sempre dal punto di vista della relatività generale) il movimento di un punto materiale entro un campo statico, nell'ipotesi che sia trascurabile la modificazione del campo provocata dal moto del punto.

Nei §§ 1-2 attribuisco alle equazioni ricordate una forma invariantiva rispetto al ds^2 dello spazio ambiente. Con ciò rimane direttamente collegata la natura metrica di questo spazio ai fenomeni di equilibrio che vi hanno sede, mentre nella forma generale di Einstein (valida per fenomeni comunque variabili col posto e coll'istante) si presentano fuse insieme le misure dello spazio e del tempo in una metrica quadridimensionale.

Un'immediata conseguenza delle equazioni così trasformate si è che, in regime statico, la curvatura media dello spazio fisico è necessariamente *positiva o nulla.*

Passo quindi (§§ 3-4) alle equazioni del moto di un punto materiale. Anche qui si tratta semplicemente di lumeggiare le particolari proprietà dovute al regime statico del campo. Tra queste figura la equazione variazionale delle traiettorie, che è in sostanza l'espressione appropriata al caso del principio della minima azione. La trasformazione, con cui vi si giunge eliminando il tempo, è perfettamente applicabile anche nell'ordinaria meccanica dei sistemi olonomi, e serve a passare (supposte le forze conservative) dal principio di Hamilton a quello della minima azione con qualche maggiore spontaneità e semplicità che non si riscontri nei procedimenti classici (1).

1. — Le equazioni di Einstein nel caso statico.

Quando si tratta di fenomeni statici, la forma differenziale quaternaria ds'^2, che congloba le misure dello spazio e del tempo, si presenta sotto la forma

$$(1) \qquad \sum_{0}^{3}{}_{ik} g_{ik}\, dx_i\, dx_k = V^2\, dx_0^2 - ds^2 ,$$

(1) Veggansi ad es. i trattati seguenti: Appell, *Traité de mécanique rationnelle*, tomo 2 (3ª ediz.) [Paris, Gauthier-Villars, 1911], nn. 483-487; Maggi, *Principii di stereodinamica* [Milano, Hoepli, 1903], §§ 102-103; Whittaker, *Analytical Dynamics* [Cambridge, University Press, 1904], sez. 99-100.

dove x_0 rappresenta il tempo e

$$(2) \qquad ds^2 = \sum_1^3{}_{ik} a_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

è il quadrato dell'elemento lineare dello spazio fisico ambiente. I coefficienti a_{ik} vanno ritenuti, al pari di V, funzioni soltanto di x_1, x_2, x_3; la V si interpreta come velocità della luce e si considera quindi essenzialmente positiva.

Con manifesto significato dei simboli, si ha

$$(3) \qquad \begin{cases} g_{ik} = -a_{ik}\ ,\ g_{0i} = 0\ ,\ g_{00} = V^2; \\ g = -aV^2; \\ g^{(ik)} = -a^{(ik)}\ ,\ g^{(0i)} = 0\ ,\ g^{(00)} = \dfrac{1}{V^2} \\ (i, k = 1, 2, 3). \end{cases}$$

Converrà contrassegnare con un apice i simboli di Christoffel e di Riemann relativi alla forma quaternaria (1), riservando la ordinaria notazione senza apice agli analoghi simboli relativi alla (2).

Dalle formule di definizione si ricava subito, in base alle (3),

$$(4) \qquad \begin{cases} \left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\}' = \left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\}; \\ \left\{ \begin{matrix} ik \\ 0 \end{matrix} \right\}' = \left\{ \begin{matrix} 0i \\ k \end{matrix} \right\}' = \left\{ \begin{matrix} 00 \\ 0 \end{matrix} \right\}' = 0; \\ \left\{ \begin{matrix} i0 \\ 0 \end{matrix} \right\}' = \dfrac{V_i}{V}; \\ \left\{ \begin{matrix} 00 \\ i \end{matrix} \right\}' = VV^{(i)}, \end{cases}$$

dove i, k, l possono assumere i valori $1, 2, 3$, $V_i = \dfrac{\partial V}{\partial x_i}$, e $V^{(i)} = \sum_1^3{}_j a_{ij} V$ ne è il sistema reciproco rispetto al ds^2.

Nella teoria di Einstein ha importanza fondamentale il sistema covariante doppio

$$(5) \qquad G'_{ik} = \sum_0^3{}_h \{ih, hk\}' = \sum_0^3{}_h \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \begin{matrix} ih \\ h \end{matrix} \right\}' - \frac{\partial}{\partial x_h} \left\{ \begin{matrix} ik \\ h \end{matrix} \right\}' \right] + \\ + \sum_0^3{}_{hl} \left[\left\{ \begin{matrix} ih \\ l \end{matrix} \right\}' \left\{ \begin{matrix} kl \\ h \end{matrix} \right\}' - \left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\}' \left\{ \begin{matrix} lh \\ h \end{matrix} \right\}' \right] \quad (i, k = 0, 1, 2, 3).$$

Introducendo l'analogo sistema

$$G_{ik} = \sum_{1}^{3}{}_h \{ih, hk\} \qquad (i, k = 1, 2, 3) \tag{6}$$

relativo alla forma ternaria (2), si trova, dopo ovvie riduzioni,

$$\begin{cases} G'_{ik} = G_{ik} + \dfrac{V_{ik}}{V}, \\ G'_{0i} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3), \\ G'_{00} = -V\Delta_2 V, \end{cases} \tag{7}$$

in cui le V_{ik} rappresentano derivate seconde covarianti e il Δ_2 parametro differenziale di 2° ordine con referenza al ds^2 spaziale (2).

In base a queste formule e alle (3), si ha, per l'invariante lineare del sistema G'_{ik},

$$G' = \sum_{0}^{3}{}_{ik}\, g^{(ik)} G'_{ik} = g^{(00)} G'_{00} - \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, a^{(ik)} G'_{ik} =$$

$$= -\frac{\Delta_2 V}{V} - \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, a^{(ik)} G_{ik} - \frac{\Delta_2 V}{V}.$$

Se quindi si pone

$$-2\mathfrak{M} = \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, a^{(ik)} G_{ik}, \tag{8}$$

con che, come verificheremo al § 3, $\mathfrak{M}$ rappresenta la *curvatura media* dello spazio ambiente, risulta

$$\tfrac{1}{2} G' = \mathfrak{M} - \frac{\Delta_2 V}{V}, \tag{9}$$

che fornisce l'espressione statica dell'invariante G'.

Ciò premesso, ricordiamo [1] che le equazioni gravitazionali sono

$$G'_{ik} - \tfrac{1}{2} G' g_{ik} = -\varkappa T_{ik} \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3),$$

dove $\varkappa$ è costante e T_{ik} designa il tensore energetico.

In condizioni statiche, le T_{ik} sono, come tutto il resto, indipendenti dal tempo x_0; inoltre le $T_{i0} = T_{0i}$ si annullano, rappresentando (previa divisione per $-\sqrt{-g_{00} g_{ii}} = -V\sqrt{a_{ii}}$) componenti di flusso dell'energia. Perciò, avuto riguardo alle (3) e (7), tre delle richiamate equazioni si ridu-

[1]. Cfr. p. es. la Nota *Sulla espressione analitica spettante al tensore gravitazionale nella teoria di Einstein*, in questo volume dei Rendiconti, pp. 381-391.

cono a pure identità; e ne rimangono sette: le sei (corrispondenti ai valori non nulli degli indici)

$$(10) \qquad G_{ik} + \mathfrak{M}\, a_{ik} + \frac{V_{ik}}{V} - \frac{\Delta_2 V}{V}\, a_{ik} = -\varkappa T_{ik} \qquad (i\,.\,k = 1\,,\,2\,,\,3);$$

nonchè (per $i = k = 0$)

$$-V\Delta_2 V - \tfrac{1}{2} G' g_{00} = -\varkappa T_{00}\,,$$

ossia, badando alla (9),

$$(I) \qquad \mathfrak{M} = \varkappa \frac{T_{00}}{V^2}\,.$$

Queste sette equazioni (10) ed (I) riducono, come è nella natura delle cose, la statica einsteiniana alle tre dimensioni dello spazio ambiente. Esse hanno forma invariantiva rispetto alla metrica di questo spazio, fungendo — colla nomenclatura del calcolo differenziale assoluto — da forma fondamentale il relativo ds^2. Vi figurano inoltre, come elementi associati alla forma fondamentale, le due funzioni (invarianti) V e T_{00}, e il sistema covariante doppio T_{ik} $(i\,,\,k = 1\,,\,2\,,\,3)$. Quest'ultimo caratterizza la distribuzione degli sforzi; mentre $\frac{T_{00}}{V^2}$ si interpreta quale densità d'energia [cfr. il § 3 della mia Nota, testè citata]. rappresentando V, come è stato detto in principio, la velocità della luce.

Nei riguardi della densità di energia giova rilevare che, almeno nell'ambito dei fenomeni oggidì meglio conosciuti (sia materiali che elettromagnetici in senso lato), non c'è esempio di densità negativa (1), sicchè si può ritenere il secondo membro della (I) ≥ 0. Ne viene questo corollario geometrico: *La curvatura media* $\mathfrak{M}$ (somma delle tre curvature principali) *che si determina nello spazio fisico per effetto di fenomeni puramente statici, è in ogni caso positiva o nulla.*

2. — Le α_{ik} di Ricci – Forma definitiva delle equazioni della statica.

Per le varietà a tre dimensioni i simboli di Riemann (di prima specie) $a_{ij,hk}$ $(i\,,\,j\,.\,h\,,\,k = 1\,,\,2\,,\,3)$ si riducono sostanzialmente allo schema

(1) Infatti, se in un dato posto, c'è materia in riposo distribuita con densità μ, ciò importa una energia di origine materiale $V^2\mu$, che (in condizioni ordinarie) prepondera di gran lunga su tutti gli altri eventuali contributi D'altra parte il contributo alla densità d'energia di origine elettromagnetica è esso pure ≥ 0. Perciò, anche in assenza di materia, la densità di energia non sembra suscettibile di valori negativi.

$a_{i+1\,i+2,\,k+1\,k+2}$ (colla convenzione di risguardare equivalenti due indici che differiscono per multipli di 3), e vengono opportunamente sostituiti dai rapporti

$$\alpha^{(ik)} = \frac{a_{i+1\,i+2,\,k+1\,k+2}}{a} \qquad (i, k = 1, 2, 3) \tag{11}$$

introdotti dal Ricci, che costituiscono, come egli ha mostrato (e come si verifica materialmente in modo ovvio), un sistema doppio simmetrico contravariante.

Con α_{ik} si intende naturalmente il sistema covariante reciproco, mercè cui le $\alpha^{(ik)}$ si esprimono sotto la forma

$$\alpha^{(ik)} = \sum_{1}^{3}{}_{jh}\, a^{(ij)}\, a^{(hk)}\, \alpha_{jh} . \tag{12}$$

Vogliamo stabilire le relazioni che legano le α_{ik} alle G_{ik} [1].

Procedendo per via diretta, si può partire dalle (6) e sostituire nei secondi membri i simboli $\{ih\,.\,hk\}$ mediante quelli di prima specie, scrivendo

$$G_{ik} = \sum_{1}^{3}{}_{jh}\, a^{(jh)}\, a_{ij,\,hk} . \tag{6'}$$

Il secondo membro si sviluppa, attribuendo a j i valori i, $i+1$, $i+2$ e ad h i valori k, $k+1$, $k+2$. Tenendo conto delle identità

$$a_{ij,\,hk} = a_{ji,\,hk} = -\,a_{ij,\,kh} ,$$

e delle (11), si ha

$$G_{ik} = a\,\{ - a^{(i+1\,k+1)}\, a^{(i+2\,k+2)} + a^{(i+1\,k+2)}\, a^{(i+2\,k+1)} + \\ + a^{(i+2\,k+1)}\, a^{(i+1\,k+2)} - a^{(i+2\,k+2)}\, a^{(i+1\,k+1)}\} ,$$

ossia, in base alle (12),

$$G_{ik} = a \sum_{1}^{3}{}_{jh}\, \alpha_{jh}\,\{ - a^{(i+1\,k+1)}\, a^{(i+2\,j)}\, a^{(k+2\,h)} + a^{(i+1\,k+2)}\, a^{(i+2\,j)}\, a^{(k+1\,h)} + \\ + a^{(i+2\,k+1)}\, a^{(i+1\,j)}\, a^{(k+2\,h)} - a^{(i+2\,k+2)}\, a^{(i+1\,j)}\, a^{(k+1\,h)}\} .$$

Nel sommatorio giova raggruppare il primo col secondo termine e il terzo col quarto, attribuendo ad h i valori i, $i+1$, $i+2$.

Dacchè il complemento algebrico di $a^{(ik)}$ nel determinante di queste quantità vale $\frac{a_{ik}}{a}$, risulta

$$G_{ik} = \sum_{1}^{3}{}_{j}\,\{ \alpha_{ji}\, a_{i+2\,k}\, a^{(i+2\,j)} - \alpha_{ji+2}\, a_{ik}\, a^{(i+2\,j)} + \\ + \alpha_{ji}\, a_{i+1\,k}\, a^{(i+1\,j)} - \alpha_{ji+1}\, a_{ik}\, a^{(i+1\,j)}\} ,$$

[1] Relazioni già indicate dal Ricci nella Nota *Direzioni e invarianti principali in una varietà qualunque*, Atti del R. Istituto Veneto, tomo LXIII, 1904, pag. 1235.

la quale, aggiungendo e togliendo (sotto il sommatorio) $\alpha_{ji}\, a_{ik}\, a^{(ij)}$, si scrive più semplicemente

$$G_{ik} = \alpha_{ik} - a_{ik} \sum_1^3{}_{ij}\, \alpha_{lj}\, a^{(lj)} .$$

Moltiplichiamo per $a^{(ik)}$ e sommiamo rispetto ai due indici i e k. Tenuto conto che $\sum_1^3{}_{ik}\, a^{(ik)}\, a_{ik} = 3$, il confronto colla (8) porge

$$\mathfrak{M} = \sum_1^3{}_{ik}\, a^{(ik)}\, \alpha_{ik} , \tag{13}$$

sicchè le ottenute relazioni fra le G_{ik} e le α_{ik} assumono l'aspetto:

$$\alpha_{ik} = G_{ik} + \mathfrak{M}\, a_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3) , \tag{14}$$

che più conviene al nostro scopo [1].

[1] Si può arrivarvi in modo più elegante, ricorrendo ai sistemi E spettanti al nostro ds^2 ternario [cfr. Ricci et Levi-Civita. *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*. Math. Ann., B. 54, 1900. pag. 135; Ricci, *Sulle superficie geodetiche ....*, in questi Rendiconti vol. XII, 1° semestre 1903, pag. 410]. In primo luogo, mediante l'E covariante si scrivono le (12) sotto la forma

$$a_{ij.hk} = \sum_1^3{}_{pq}\, \alpha^{(pq)}\, \varepsilon_{pij}\, \varepsilon_{qhk} ,$$

con che le (6′) assumono l'aspetto

$$G_{ik} = \sum_1^3{}_{jhpq}\, a^{(jh)}\, \alpha^{(pq)}\, \varepsilon_{pij}\, \varepsilon_{qhk} = -\sum_1^3{}_{jhpq}\, a^{(jh)}\, \alpha^{(pq)}\, \varepsilon_{pij}\, \varepsilon_{qkh} .$$

D'altra parte la definizione delle $a^{(jh)}$ si traduce, mediante l'E contravariante, nelle formule

$$a^{(jh)} = \tfrac{1}{2} \sum_1^3{}_{\nu\rho\sigma\tau}\, \varepsilon^{(\nu\rho j)}\, \varepsilon^{(\sigma\tau h)}\, a_{\nu\sigma}\, a_{\rho\tau} .$$

Sostituiamo in G_{ik}, badando alle identità (di verificazione immediata)

$$\sum_1^3{}_j\, \varepsilon_{pij}\, \varepsilon^{(\nu\rho j)} = \varepsilon_{p\nu}\, \varepsilon_{i\rho} - \varepsilon_{p\rho}\, \varepsilon_{i\nu} \qquad (p, i, \nu, \rho = 1, 2, 3),$$

e a quest'altre (che ne differiscono solo per la designazione degli indici)

$$\sum_1^3{}_h\, \varepsilon_{qhk}\, \varepsilon^{(\sigma\tau h)} = \varepsilon_{q\sigma}\, \varepsilon_{k\tau} - \varepsilon_{q\tau}\, \varepsilon_{k\sigma} \qquad (q, k, \sigma, \tau = 1, 2, 3),$$

nelle quali le ε a due indici stanno, secondo il solito, a rappresentare lo zero quando gli indici sono distinti, e l'unità quando coincidono.

Ove si noti che l'espressione (13) di $\mathfrak{M}$ equivale a

$$\mathfrak{M} = \sum_1^3{}_{pq}\, a_{pq}\, \alpha^{(pq)} ,$$

risultano appunto le (14).

La (13) poi rende ragione del significato di $\mathfrak{M}$ come curvatura media della varietà. Infatti le curvature principali sono, per definizione. le radici (necessariamente reali) $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ della equazione cubica [1]

$$\|\alpha_{ik} - \omega a_{ik}\| = 0,$$

e il secondo membro della (13) è precisamente la somma di queste radici (coefficiente di ω^2 diviso per $-a$, essendo $-a$ il coefficiente di ω^3 nel primo membro della equazione cubica).

Mercè le (14), si introducono le α_{ik} nelle equazioni gravitazionali (10). Trascrivendo anche la (I), si ha in definitiva il sistema

$$\text{(I)} \qquad \mathfrak{M} = \varkappa \frac{T_{00}}{V^2},$$

$$\text{(II)} \qquad \alpha_{ik} + \frac{V_{ik}}{V} - \frac{\Delta_2 V}{V} a_{ik} = -\varkappa T_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3),$$

dove la curvatura media $\mathfrak{M}$ ha l'espressione (13).

Una notevole conseguenza delle (II) si ha moltiplicandole per $a^{(ik)}$ e sommando rispetto ai due indici. Avuto riguardo alle (13) e (I), si ottiene

$$\text{(14)} \qquad \frac{\Delta_2 V}{V} = \tfrac{1}{2} \varkappa \left(\mathfrak{T} + \frac{T_{00}}{V^2} \right),$$

dove

$$\text{(15)} \qquad \mathfrak{T} = \sum_{1}^{3}{}_{ik} a^{(ik)} T_{ik}$$

rappresenta evidentemente l'invariante lineare del sistema degli sforzi rispetto al nostro ds^2 (dello spazio ambiente). Tale invariante — sia detto per incidenza — non deve confondersi collo scalare del tensore quadridimensionale

$$T = \sum_{0}^{3}{}_{ik} g^{(ik)} T_{ik}.$$

cui, a norma delle (3), spetta invece l'espressione

$$T = \frac{T_{00}}{V^2} - \mathfrak{T}.$$

3. — Moto di un punto materiale. – Traiettorie. – Equivalenza a geodetiche e a fasci conservativi del tipo ordinario.

Secondo la teoria generale di Einstein, qualunque sia il ds' quadridimensionale, le equazioni del moto di un punto materiale si compendiano nel principio variazionale

$$\text{(16)} \qquad \delta \int ds' = 0.$$

[1] Ricci et Levi-Civita, loc. cit., pag. 163.

In condizioni statiche, vale pel ds' la forma (1), talchè, posto, per comodità di confronto colle notazioni abituali,

$$(17) \qquad x_0 = t \quad , \quad \frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i \ \ (i = 1,2,3) \quad , \quad \frac{ds^2}{dt^2} = v^2 ,$$

la precedente può essere scritta

$$\delta \int \sqrt{V^2 - v^2}\, dt = 0 \ (^1) .$$

Per restare nel campo reale e regolare, giova escludere i movimenti in cui la velocità attraversa il valore critico V, e porre (col valore aritmetico del radicale)

$$(18) \qquad L = \begin{cases} \sqrt{V^2 - v^2} & \text{per } v < V \ (^2), \\ \sqrt{v^2 - V^2} & \text{per } v > V , \end{cases}$$

valendo in entrambi i casi l'equazione variazionale del moto

$$(16') \qquad \delta \int L\, dt = 0 .$$

Ne conseguono notoriamente le equazioni differenziali di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1,2,3) .$$

Si noterà che, nella (16), e quindi nella equivalente (16'), anche t deve essere sottoposto a variazione, trattandolo alla stessa stregua delle coordinate di spazio, e supponendo in conformità δt nullo agli estremi (dell'intervallo di integrazione). Ciò dà luogo (mercè la solita integrazione per parti) ad una quarta equazione

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_1^3{}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i - L\right) + \frac{\partial L}{\partial t} = 0 ,$$

che è però una conseguenza delle prime tre.

(1) Sotto questa forma essa venne già proposta e discussa da Abraham, però limitatamente all'ipotesi che il ds^2 sia euclideo. Cfr. in particolare *Le equazioni di Lagrange nella nuova meccanica*. Ann. di Mat., tomo XX (dedicato alla memoria di Lagrange), 1913, pp. 29-36.

(2) Si potrebbe anche limitarsi a questo primo caso, che è il solo fisicamente interessante per un effettivo punto materiale. Stimo tuttavia preferibile — giacchè l'occasione si presenta — di trattare la questione in modo completo.

Nella recente Memoria di Hilbert, *Die Grundlagen der Physik* (seconda parte) [Nachr. der K. Ges der Wiss. zu Göttingen, 1917], dove sono precisati i postulati della relatività generale, si trova, a proposito dei movimenti dei punti materiali, una specificazione qualitativa, che, in condizioni statiche, equivale appunto a $v < V$.

Quando in particolare, come nel caso attuale, $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, essa si identifica coll'integrale tipico dei sistemi lagrangiani (delle forze vive, allorchè L ha la forma quadratica rispetto alle velocità, che le compete nella meccanica ordinaria)

$$(19) \qquad \sum_1^3{}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i - L = V_0 \qquad (V_0 \text{ costante}).$$

Sfruttando questa equazione, si può, *colle dovute modalità*, eliminare dt dalla (16'), e ottenerne una formula, anch'essa variazionale, che corrisponde al principio della minima azione, compendiando le equazioni delle traiettorie. Ecco come conviene procedere.

Si premette che, nella (16'), le variazioni δx_i, δt vanno ritenute arbitrarie, ma nulle ai limiti. Si nota poi che, risguardando V_0 come una costante prefissata ($\delta V_0 = 0$), si può sostituire alla (16') la formula

$$(16'') \qquad \delta \int (L + V_0)\, dt = 0,$$

sostanzialmente equivalente, perchè dà luogo alle stesse equazioni di Lagrange. Essa però presenta sulla (16') il vantaggio che non occorre più imporre a δt la condizione di annullarsi agli estremi (semprechè si intenda che, nell'integrale (19), la costante del secondo membro abbia il valore prefissato V_0). Questo risulta subito dall'osservare che, portando il δ sotto il segno, si ha, materialmente, come contributo proveniente dalla variazione di t,

$$\int \delta \dot{t} \left[-\sum_1^3{}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i + L + V_0 \right],$$

che si annulla, in virtù della (19).

Così stando le cose, diviene lecito di considerare, nella (16''), le x_i, t, e subordinatamente le loro variazioni, legate dalla (19), anzichè indipendenti. In verità, nulla vieta *a priori* di introdurre vincoli a piacimento, sia nella (16') che nella (16''), *purchè soltanto rimangano rispettate le condizioni ai limiti per le* δx_i, δt. Come si comporta la (19) a tale riguardo? La sua variazione fornisce, possiamo dire, il δdt, o, ciò che è lo stesso, il $d\delta t$ in termini delle δx_i che rimangono (funzioni di t) arbitrarie, salvo l'annullamento ai limiti. Il δt risulta in conformità da una quadratura, e quindi si può renderlo zero ad *uno* degli estremi dell'intervallo di integrazione, ma non in generale anche all'altro. Perciò l'introduzione del vincolo (19) è perfettamente legittima nella (16''), la quale non richiede l'annullarsi ai limiti di δt; ma non lo sarebbe invece nella (16').

Chiarito il concetto, esplicitiamo il calcolo.

La (19), moltiplicando per L, si scrive

$$\tfrac{1}{2}\sum_1^3{}_i \frac{\partial L^2}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i - L^2 = V_0 L .$$

In virtù della (18),

$$L^2 = \pm (V^2 - v^2) ,$$

il segno dovendo essere scelto in modo che L^2 risulti positivo. Ne deduciamo (per essere v^2 omogeneo di 2° grado nelle $\dot{x}_i$, e V^2 funzione soltanto delle x_i)

$$\tfrac{1}{2}\sum_1^3{}_i \frac{\partial L^2}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i = \mp \tfrac{1}{2}\sum_1^3{}_i \frac{\partial v^2}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i = \mp v^2 ,$$

dovendosi adottare il segno superiore o l'inferiore, secondochè vale l'uno o l'altro per L^2. Con questa stessa convenzione, la precedente, cioè in sostanza l'integrale (19), si scrive

$$\mp V^2 = V_0 L . \tag{19'}$$

Perciò, badando alla (18) stessa, si vede che *la costante* V_0 *è necessariamente negativa e in valore assoluto* $> V$, *nei moti che seguono con velocità* $v < V$; *è invece positiva e può assumere qualsiasi valore fra* 0 *e* ∞ *nell'ipotesi opposta.*

Dalla (19'), dividendo per V_0 ed elevando al quadrato, si ha

$$v^2 = V^2 \mp \frac{V^4}{V_0^2} ,$$

colla solita discriminazione del segno, sicchè, in tutte le formule simultaneamente, vale il segno superiore, ovvero l'inferiore.

Dacchè $v = \dfrac{ds}{dt}$ (con ds e dt positivi), si ricava ulteriormente

$$dt = \frac{ds}{V}\left(1 \mp \frac{V^2}{V_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}} .$$

D'altra parte la (19') dà

$$L + V_0 = V_0 \left(1 \mp \frac{V^2}{V_0^2}\right) .$$

Sostituendo in (16''), sopprimendo il fattore costante V_0, e ponendo

$$2U = \frac{1}{V^2}\left(1 \mp \frac{V^2}{V_0^2}\right) = \frac{1}{V^2} \mp \frac{1}{V_0^2} , \tag{20}$$

risulta *l'equazione comprensiva delle traiettorie*

$$\delta \int \sqrt{2U}\, ds = 0 . \tag{21}$$

Queste appariscono in conformità coincidenti (ben si intende per ciascun valore della costante V_0 che compare implicitamente in U) *colle geodetiche di uno spazio di elemento lineare* $\sqrt{2U}\, ds$, *od anche* (1) *con un fascio di traiettorie di un problema conservativo di meccanica ordinaria nello spazio fisico di elemento lineare* ds. Il fascio è caratterizzato come segue: forza viva $\frac{1}{2}\frac{ds^2}{dt^{*2}}$, t^* designando una variabile ausiliaria che funge da tempo; funzione delle forze c^4U, con c costante arbitraria; energia totale $\frac{1}{2}\frac{ds^2}{dt^{*2}} - c^4U = 0$. Si può anche dire, badando alla espressione (20) di U: funzione delle forze $\frac{c^4}{2V^2}$; energia totale $\pm\frac{c^4}{2V_0^2}$.

4. — Casi limiti. – Interpretazione ottica.

1°. *Attrazione newtoniana.* — Nell'ipotesi che la forma quadridimensionale $ds'^2 = V^2 dt^2 - ds^2$ sia molto prossima al tipo euclideo, si può porre

$$V = c(1+\gamma) \quad , \quad ds^2 = \sum_1^3{}_{ik} (\varepsilon_{ik} + \gamma_{ik})\, dx_i\, dx_k , \tag{22}$$

dove c è costante (velocità della luce in assenza d'ogni circostanza perturbatrice), e *le* γ, *che sono tutte puri numeri, vanno trattate come quantità di primo ordine.*

La funzione lagrangiana, per moti dotati di velocità $v < V$, è, a norma della (18),

$$\sqrt{V^2 - v^2} ,$$

ossia, moltiplicando per $-c$ (ciò che è lecito senza alterare le equazioni del moto) badando alla prima delle (22), e trascurando γ^2,

$$-c^2\sqrt{1 + 2\gamma - \frac{v^2}{c^2}} .$$

Supposto che (come avviene di regola pel moto dei corpi ponderabili) si possa trascurare anche il quadrato del rapporto $\frac{v^2}{c^2}$, sviluppando il radicale e prescindendo dalla inessenziale costante additiva $-c^2$, la detta funzione lagrangiana assume la forma

$$L = \tfrac{1}{2} v^2 - c^2\gamma .$$

(1) Veggasi ad es. il già citato *Traité de mécanique rationnelle* di Appell, n. 487.

Per $v^2 = \frac{ds^2}{dt^2}$ si deve intendere, a norma della (21),

$$\sum_{1}^{3}{}_{ik} (\varepsilon_{ik} + \gamma_{ik}) \dot{x}_i \dot{x}_k = \sum_{1}^{3}{}_{i} \dot{x}_i^2 + \sum_{1}^{3}{}_{ik} \gamma_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k ,$$

ma è subito visto che le γ_{ik} si possono porre senz'altro eguali a zero, poichè porterebbero, nelle equazioni del moto, solo contributi di secondo ordine.

Ci troviamo pertanto ricondotti, in prima approssimazione, all'ordinaria dinamica di un punto materiale nello spazio euclideo sotto l'azione di un potenziale unitario (intendo funzione delle forze riferita all'unità di massa)

$$- c^2\gamma .$$

Attesa l'espressione $c(1 + \gamma)$ di V, la (14), colla convenuta approssimazione, diviene

$$\Delta_2\gamma = \tfrac{1}{2} \varkappa \left(\mathfrak{T} + \frac{T_{00}}{V^2} \right),$$

riducendosi in sostanza alla equazione di Poisson-Laplace caratteristica dei potenziali newtoniani. Infatti, nell'interno dei corpi ponderabili, l'energia intrinseca prepondera di gran lunga su tutte le altre forme, sicchè la densità di energia vale sensibilmente $c^2\mu$ (μ densità della materia), e $\mathfrak{T}$ risulta trascurabile di fronte a $c^2\mu$; negli spazi vuoti ($\mu = 0$), tutta la somma $\mathfrak{T} + \frac{T_{00}}{V^2}$ è trascurabile di fronte all'ordine di grandezza dei valori che le competono entro la materia. Si può così ritenere in tutto lo spazio

$$\Delta_2\gamma = \tfrac{1}{2} \varkappa c^2 \mu .$$

Dacchè, a meno di termini di second'ordine, il $\Delta_2\gamma$ si può riportare al ds^2 euclideo, e

$$\varkappa = \frac{8\pi f}{c^4} \qquad (f \text{ costante di attrazione}),$$

si ritrova effettivamente la equazione di Poisson-Laplace per il potenziale $- c^2\gamma$.

Fu appunto mediante questa considerazione che Einstein fissò il valore numerico della sua costante universale $\varkappa$.

2°. $|V_0|$ *grandissimo.* – *Confronto coi raggi luminosi.* — Se v assume, nel corso del moto, un qualche valore molto prossimo a V, il corrispondente valore di L è piccolissimo, e quindi, in base alla (19'), la costante V_0 deve ritenersi grandissima in valore assoluto (negativa o positiva secondochè $v \lesseqgtr V$).

Supponendo trascurabile $\frac{V^2}{V_0^2}$ di fronte all'unità, si ha dalla (20)

$$2U = \frac{1}{V^2},$$

talchè, per il teorema di equivalenza del precedente paragrafo, le traiettorie coincidono sia colle geodetiche dell'elemento lineare $\frac{ds}{V}$, sia (nello spazio di elemento lineare ds) con un fascio spettante alla funzione delle forze $\frac{c^4}{2V^2}$.

Il primo risultato dà luogo ad un interessante ravvicinamento ottico, già rilevato per altra via dal sig. Caldonazzo [1] a proposito della teoria di Abraham. Per conseguirlo, basta ricordare che si è attribuito a V il significato di velocità della luce entro il nostro spazio (sede di fenomeni statici) di elemento lineare ds. Conservando, anche nella nuova meccanica, il principio di Fermat, l'andamento dei raggi luminosi rimane compendiato nella formula

$$\delta \int \frac{ds}{V} = 0 .$$

A questa stessa formula $\left(\text{cioè alle geodetiche dell'elemento lineare } \frac{ds}{V}\right)$ si riduce, come s'è notato or ora, la (20) per $|V_0|$ grandissimo. Le traiettorie d'un punto materiale tendono pertanto a confondersi coi raggi luminosi al crescere indefinito di V_0, o, ciò che è lo stesso, al convergere della velocità del moto verso la velocità della luce.

3°. V_0 *piccolissimo*. — Questo caso può presentarsi, a norma delle (19′) e (18), soltanto per $v > V$ e grandissimo. La (20) mostra che $\sqrt{2U}$ è allora sensibilmente costante, sicchè la equazione (21) delle traiettorie si riduce a

$$\delta \int ds = 0 .$$

Se ne inferisce che (come nella meccanica ordinaria, quando l'azione acceleratrice delle forze è trascurabile di fronte all'inerzia) le traiettorie, entro un campo gravitazionale, tendono a diventare geodetiche al crescere indefinito della velocità.

[1] *Traiettorie dei raggi luminosi e dei punti materiali nel campo gravitazionale*, Nuovo Cimento, serie VI, vol. V, 1913, pp. 267-300.

Meccanica. — *A proposito di una recente Nota del prof. Almansi.* Nota del Socio P. Pizzetti.

Nella sua Nota, *Sulla forma dello Sferoide terrestre, dedotta dalle misure di gravità*, il prof. Almansi dichiara (a piedi della pagina 359 di questi Rendiconti) che ai risultati da lui ottenuti non è giunto il prof. Helmert nella sua opera sulle teorie fisiche e matematiche della figura della Terra, discutendo lo stesso problema e seguendo, su per giù, il metodo da lui, Almansi, seguìto.

Questa dichiarazione può far sorgere il dubbio che vi sia contraddizione fra i risultati dati dai due egregi studiosi. Vale la pena, quindi, di far vedere come le formole dell'Almansi si deducano, immediatamente e senza sforzo alcuno, da quelle date dal Helmert a pag. 83 del 2° volume della citata sua opera. Scriviamo le formole (1) (2) (3) (4) di Helmert come segue:

$$(1) \qquad g = g_a\left(1 + \mathfrak{b}\,\mathrm{sen}^2 B - \frac{\mathfrak{b}_4}{4}\,\mathrm{sen}^2 2B\right)$$

$$(2) \qquad r = a\left\{1 - \mathfrak{a}\,\mathrm{sen}^2\varphi - \frac{\mathfrak{a}(\mathfrak{b}-\mathfrak{a})+\mathfrak{b}}{4}\,\mathrm{sen}^2 2\varphi\right\}$$

$$(3) \qquad \mathfrak{a} = \frac{5}{2}\,\mathfrak{c} - \mathfrak{b} - \mathfrak{a}\left(\mathfrak{a} + \frac{1}{2}\,\mathfrak{c}\right) + \frac{2}{7}\,\mathfrak{b}$$

$$(4) \qquad \mathfrak{b} = \frac{1}{3}\,(7\mathfrak{a}^2 - 4\mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{b}_4)$$

dove g_a indica la gravità all'equatore e B la latitudine geografica (che Almansi indica rispettivamente con g_0 e con φ_1), φ indica la latitudine geocentrica, e dove, per comodità di paragone, ho sostituito a $\mathrm{sen}^4 B$ e $\mathrm{sen}^4\varphi$, che figurano nelle formole di Helmert, le loro espressioni per mezzo dei seni quadrati degli archi B, 2B, φ, 2φ.

Il paragone delle formole (1) e (2) colle (1) e (3) a pag. 358 di questi Rendiconti, mostra che fra i simboli del Helmert e quelli dell'Almansi, passano le seguenti relazioni:

$$(5) \qquad \mathfrak{a} = \alpha \qquad \mathfrak{b} = \gamma \qquad -\frac{1}{4}\,\mathfrak{b}_4 = \gamma' \qquad \frac{\mathfrak{a}(\mathfrak{b}-\mathfrak{a})+\mathfrak{b}}{4} = \alpha'.$$

Di più il simbolo $\mathfrak{c}$ del primo corrisponde al λ del secondo.

Posto, coll'Almansi,

$$\frac{5}{2}\,\lambda - \gamma = \alpha_0,$$

la (3) dimostra che, *a meno di termini piccoli del 2° ordine*, la costante a equivale alla α_0, e una tale espressione si può, *trascurando termini piccoli del 3° ordine*, sostituire nel 2° membro della (4). Si ha così

$$(6) \qquad b = \frac{1}{3}(7\alpha_0^2 - 4\alpha_0\gamma - 4\gamma') = \frac{11}{3}\alpha_0^2 - \frac{10}{3}\alpha_0\lambda - \frac{4}{3}\gamma'.$$

Sostituendo nel 2° membro della (3) questa espressione di b e ponendo, nello stesso 2° membro, per a il valore approssimato α_0 (con che l'errore commesso sarà del 3° ordine) si ottiene:

$$a = \alpha_0 + \frac{\alpha_0^2}{21} - \frac{61}{42}\alpha_0\lambda - \frac{8}{21}\gamma'$$

che coincide colla espressione di α data dalla prima delle formole (4) di Almansi. Sostituendo poi nel 1° membro della nostra formola (5) per b la espressione (6), per a la α_0 (colla solita approssimazione), e per b la $\gamma = \frac{5}{2}\lambda - \alpha_0$, si ottiene la espressione di α', identica a quella data da Almansi:

$$\alpha' = \frac{5}{12}\alpha_0^2 - \frac{5}{24}\alpha_0\lambda - \frac{1}{3}\gamma'.$$

Fisica terrestre. — *Sulla propagazione delle onde sismiche.* Nota II del Socio C. Somigliana.

I.

Come abbiamo già osservato nella Nota precedente, le equazioni che determinano gli angoli di emergenza di due onde associate

$$(1) \qquad \operatorname{tg}^2\theta_a = \frac{\gamma_1^2}{\alpha_1^2} = \frac{b^2}{a^2}\eta - 1 \quad , \quad \operatorname{tg}^2\theta_b = \frac{\gamma_2^2}{\alpha_2^2} = \eta - 1 ,$$

non hanno soluzioni reali quando $\eta < 1$, come avviene per la terza radice η_3 della equazione di Rayleigh. Dobbiamo ora esaminare quale possa essere il significato delle nostre soluzioni delle equazioni del moto in questo caso.

Se noi al posto delle costanti α_1, α_2 introduciamo due nuove costanti α_1', α_2' mediante le relazioni

$$(2) \qquad \alpha_1 = i\alpha_1' \qquad \alpha_2 = i\alpha_2' \qquad (i = \sqrt{-1})$$

le equazioni (1) si possono scrivere, ponendo al posto di η la radice η_3,

$$(3) \qquad \frac{\gamma_1^2}{\alpha_1'^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2}\eta_3 \qquad \frac{\gamma_2^2}{\alpha_2'^2} = 1 - \eta_3$$

e determinano quindi dei valori reali pei rapporti $\gamma_1 : \alpha_1'$ e $\gamma_2 : \alpha_2'$. Inoltre noi possiamo in tutte le nostre formole sostituire alle costanti $\alpha_1 . \alpha_2$ le $\alpha_1' . \alpha_2'$ mediante le relazioni (2). Otterremo con ciò delle onde immaginarie, le quali soddisferanno *formalmente* alle equazioni del moto ed alle condizioni superficiali, al pari delle onde reali già considerate. Ma poichè tanto le equazioni del moto, che le condizioni superficiali sono omogenee, separando la parte reale dalla immaginaria noi potremo dedurre, da ciascuna di queste soluzioni immaginarie, due soluzioni reali. Queste soluzioni rappresenteranno quindi dei nuovi moti vibratori di un suolo piano, e non avranno più in generale il carattere di onde piane, poichè il primitivo piano d'onda diventa immaginario. Avranno però tutte un nuovo carattere cinematico comune, quello di conservare la rigidità delle rette di un sistema di rette parallele, come le onde piane conservano la rigidità dei piani di un sistema di piani paralleli. Ciò risulta immediatamente dalla osservazione che le soluzioni che abbiamo considerate sono tutte indipendenti dalla variabile y; le rette che vibrano rigidamente sono perciò le parallele all'asse delle y.

Nelle formule (23), (23′) della Nota precedente possiamo eliminare le tangenti degli angoli di emergenza θ_a , θ_b, ed esprimere le componenti di vibrazione in funzione di una qualunque delle radici dell'equazione di terzo grado di Lord Rayleigh. Notando anche che, indicando con η genericamente una di queste radici, per la velocità superficiale di propagazione si ha

$$V^2 = \eta b^2 ,$$

troviamo per l'onda longitudinale

$$u_1 = \frac{1}{2\alpha_1} \frac{1}{\sqrt{\eta \frac{b^2}{a^2} - 1}} \Psi\left(z \sqrt{\eta \frac{b^2}{a^2} - 1} + x - tb\sqrt{\eta}\right)$$

(4)

$$w_1 = \frac{1}{2\alpha_1} \Psi\left(z \sqrt{\eta \frac{b^2}{a^2} - 1} + x - tb\sqrt{\eta}\right),$$

e per la trasversale

$$u_2 = \frac{1}{\alpha_2} \frac{\sqrt{\eta - 1}}{2 - \eta} \Psi\left(z\sqrt{\eta - 1} + x - tb\sqrt{\eta}\right)$$

(4′)

$$w_2 = -\frac{1}{\alpha_2} \frac{1}{2 - \eta} \Psi\left(z\sqrt{\eta - 1} + x - tb\sqrt{\eta}\right).$$

Queste espressioni soddisfanno *formalmente* a tutte le condizioni, cioè alle equazioni del moto ed alle equazioni alla superficie del suolo, quando η sia una radice qualsiasi dell'equazione di Lord Rayleigh. Se

(5) $$\eta > \frac{a^2}{b^2}$$

i radicali che compaiono nelle formole precedenti sono reali, e quindi se la funzione arbitraria Ψ è reale, tutto è reale, come abbiamo già visto. Ma, anche quando la condizione (5) non è soddisfatta, come avviene per $\eta = \eta_3$, le equazioni del moto ed alla superficie non cessano di essere soddisfatte. È appunto questo il caso che ora dobbiamo studiare. Per mettere in evidenza le quantità immaginarie, che allora compaiono, possiamo scrivere le espressioni (4), (4′) nella forma seguente

$$u_1 = -\frac{1}{2\alpha_1'}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}\eta}}\Psi\left(iz\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}\eta}+x-tb\sqrt{\eta}\right)$$

$$(6)\qquad w_1 = -\frac{i}{2\alpha_1'}\Psi\left(iz\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}\eta}+x-tb\sqrt{\eta}\right)$$

$$u_2 = \frac{1}{\alpha_2'}\frac{\sqrt{1-\eta}}{2-\eta}\Psi\left(iz\sqrt{1-\eta}+x-tb\sqrt{\eta}\right)$$

$$w_2 = \frac{i}{\alpha_2'}\frac{1}{2-\eta}\Psi\left(iz\sqrt{1-\eta}+x-tb\sqrt{\eta}\right),$$

ove le costanti α_1', α_2' sono legate alle α_1, α_2 dalle relazioni (2) e quindi sono determinate dalle equazioni (3).

Sono queste le soluzioni immaginarie che si hanno in questo caso, e la cui esistenza risulta dimostrata in ogni caso, cioè qualunque sia il valore del rapporto $\frac{b^2}{a^2}$ (sempre minore di 1) poichè, come si è visto, la radice η_3 esiste sempre. Esse esistono quindi indipendentemente dalla scelta del valore $\sigma = 1/4$ pel coefficiente di Poisson. Noi potremo poi dedurne delle soluzioni reali separando la parte reale dalla immaginaria nella funzione $\Psi(\zeta)$ e prendendo per u, w le parti reali dei secondi membri, od i coefficienti dell'unità immaginaria.

I piani d'onda risultano in questo caso dalle equazioni

$$iz\sqrt{1-\eta\frac{b^2}{a^2}}+x = \text{cost.} \qquad iz\sqrt{1-\eta}+x = \text{cost.}$$

sono quindi immaginari; perciò si ha la proprietà già notata, che durante la vibrazione si conservano rigide le rette

$$z = \text{cost.} \qquad x = \text{cost.}$$

cioè le rette normali al piano di propagazione. I piani d'onda degenerano in un sistema di rette parallele.

Per ottenere da questi sistemi di onde le cosidette onde superficiali di Rayleigh, basta specializzare la funzione Ψ ponendo

$$\Psi(\zeta) = e^{ik\zeta},$$

ove k è una costante reale, e porre $\sigma = 1/4$, cioè $b^2/a^2 = 1/3$. Ma infiniti altri sistemi di onde potremmo avere, analoghe alle onde di Rayleigh, prendendo per Ψ un'altra funzione qualsiasi.

Nel caso di Lord Rayleigh, si ha

$$\Psi(\zeta) = e^{-2kz\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}\eta}}\left(\cos k(x - tb\sqrt{\eta}) + i \operatorname{sen} k(x - tb\sqrt{\eta})\right)$$

ove si deve porre

$$\eta = 0{,}8453\,.$$

Prendendo le parti reali delle formole precedenti troviamo

$$u_1 = \frac{1}{2\alpha_1}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}\eta}}\, e^{-2kz\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}\eta}} \cos k(x - tb\sqrt{\eta})$$

$$w_1 = -\frac{1}{2\alpha_1}\, e^{-2kz\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}\eta}} \operatorname{sen} k(x - tb\sqrt{\eta})$$

E analogamente

$$u_2 = \frac{1}{\alpha_2}\frac{\sqrt{1-\eta}}{2-\eta}\, e^{-2kz\sqrt{1-\eta}} \cos k(x - tb\sqrt{\eta})$$

$$w_2 = -\frac{1}{\alpha_2}\frac{1}{2-\eta}\, e^{-2kz\sqrt{1-\eta}} \operatorname{sen} k(x - tb\sqrt{\eta})\,.$$

Si hanno quindi delle vibrazioni armoniche smorzate verso la profondità, (se l'asse delle z è diretto verso l'interno della terra) di cui k determina la frequenza. Per questa costante non si ha alcuna condizione; potremmo perciò costruire delle soluzioni più generali composte dalla somma di un numero qualunque di soluzioni di diversa frequenza. I fattori di smorzamento

$$k\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}\eta} \qquad k\sqrt{1-\eta}$$

invece risultano determinati, quando sia data la frequenza. Finalmente le costanti α_1, α_2 si possono determinare in modo che le ampiezze delle oscillazioni risultanti dalla sovrapposizione delle due onde, cioè le oscillazioni

$$u = u_1 + u_2 \qquad w = w_1 + w_2$$

abbiano valori assegnati, sulla superficie del suolo.

Possiamo fare in generale questa determinazione, valendoci delle formole (4) (4′). di cui quelle che seguono sono una conseguenza. Per la vibrazione risultante superficiale u_0, w_0 si ha dalle (4)

$$u_0 = \left\{\frac{1}{2\alpha_1}\frac{1}{\sqrt{\eta\frac{b^2}{a^2}-1}} + \frac{1}{\alpha_2}\frac{\sqrt{\eta-1}}{2-\eta}\right\}\Psi(x - Vt)$$

$$w_0 = \left\{\frac{1}{2\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2}\frac{1}{2-\eta}\right\}\Psi(x - Vt)\,,$$

quindi se $\Psi(\zeta)$ è funzione periodica oscillante fra $-A$ e $+A$, mentre $2U_0$ e $2W_0$ sono le ampiezze assegnate per u_0, w_0 avremo per determinare α_1, α_2 le equazioni lineari

$$\left(\frac{1}{2\alpha_1}\frac{1}{\sqrt{\eta_1\frac{h^2}{a^2}-1}}+\frac{1}{\alpha_2}\frac{\sqrt{\eta_1-1}}{2-\eta_1}\right)A=U_0$$

$$\left(\frac{1}{2\alpha_1}-\frac{1}{\alpha_2}\frac{1}{2-\eta_1}\right)A=W_0$$

il cui determinante

$$-\frac{A^2}{2(2-\eta_1)}\left[\frac{1}{\sqrt{\eta\frac{h^2}{a^2}-1}}+1\sqrt{\eta_1-1}\right]$$

è sempre diverso da zero.

Quando $\Psi(\zeta)$ non sia periodica, è possibile determinare il rapporto $\alpha_1:\alpha_2$ in funzione dell'angolo costante che la vibrazione superficiale fa con la verticale, come già si è visto nella precedente Nota.

Osserviamo infine che nell'istante iniziale sulla superficie libera del suolo si ha

$$u_0=C\Psi(x)\qquad w_0=D\Psi(x),$$

ove C, D sono delle costanti. Ora se noi supponiamo che la $\Psi(x)$ abbia valori diversi da zero soltanto entro l'intervallo

$$x_0<x<x_1$$

avremo che nell'istante iniziale la superficie è tutta in quiete eccettuata una striscia normale all'asse delle x, nella quale si ha una perturbazione arbitraria. Le formole trovate dànno quindi la soluzione generale del problema della propagazione, sia in superficie, che in profondità, di una perturbazione superficiale comunque determinata in grandezza, nell'interno della striscia. Essa deve però soddisfare alla condizione di avere un'inclinazione costante sulla verticale. Si ha così in superficie un'onda isolata rettilinea, propagantesi normalmente alla striscia iniziale.

II.

Volendo ora basare una rappresentazione meccanica delle oscillazioni sismiche sulla soluzione del problema delle oscillazioni di un suolo piano che abbiamo precedentemente studiato, si possono fare le considerazioni seguenti.

Noi possiamo immaginare le onde, approssimativamente sferiche, che partono dal *focus* del terremoto, posto ad una certa profondità nel sotto-

suolo, come composte ciascuna di una numero grandissimo di elementi di onde piane, propagantesi in tutte le direzioni, e inviluppanti una di queste onde sferiche. È naturale allora di pensare che il suolo eserciti in certo modo un'azione selettiva sopra queste onde, così da trasmettere a grandi distanze soltanto quelle che sono compatibili colla superficie piana che lo limita e colle sue proprietà fisiche. Verranno quindi rapidamente smorzate quelle onde che non soddisfanno alle condizioni generali della propagazione in un suolo piano, e rimarranno in particolare quelle la cui velocità di propagazione è la stessa determinata dalla forma piana della superficie libera. È anche ammissibile che sulla superficie libera debbano manifestarsi con effetti più intensi quelle onde, che avendo identica velocità di propagazione superficiale, vengono in certo modo a sovrapporre i loro effetti.

La teoria delle onde associate, che abbiamo svolta, riproduce un tale stato di cose in modo abbastanza conforme a quanto l'intuizione ci suggerisce. Noi abbiamo considerato invero un unico piano di propagazione. Ma le proprietà ben note circa la sovrapposizione dei piccoli modi, ci permette di ammettere che i risultati, trovati per uno di questi piani, possano simultaneamente verificarsi per tutti i piani passanti per la verticale dell'epicentro. Avremo così che le coppie di direzione di propagazione associate daranno luogo a coni associati, luoghi di queste direzioni, generanti in superficie delle onde circolari, come loro inviluppo, che si propagheranno intorno all'epicentro.

Per quanto abbiamo dimostrato, una qualsiasi perturbazione darà luogo a tre gruppi di queste onde, di cui i due aventi maggiori velocità di propagazione, risultano dalla sovrapposizione di due onde piane ordinarie, l'una longitudinale e l'altra trasversale; il terzo, di velocità minore, è formato da onde superficiali di Rayleigh generalizzate. Siccome l'esperienza ha constatato che ordinariamente tre sono i gruppi di onde che successivamente perturbano una determinata località, a notevole distanza dall'epicentro, noi possiamo ragionevolmente fare l'ipotesi che essi rappresentino precisamente i tre gruppi di onde, di cui la nostra teoria ci ha dimostrato l'esistenza. I sismologi ammettono già che il terzo gruppo (L) rappresenti onde di Rayleigh; noi veniamo a riattaccare all'equazione di Rayleigh anche gli altri due gruppi. Questa equazione diviene in tal modo il centro unico di tutta la teoria.

I due primi sistemi di onde, le onde (P) ed (S), sono comunemente considerate dai sismologi, come onde piane rispettivamente longitudinali e trasversali. È chiaro che sostituendo a queste onde le coppie associate, veniamo a soddisfare meglio alle leggi della meccanica, in quanto queste coppie di onde sono realmente possibili nel suolo, mentre la teoria, ora accettata, non tien conto per le onde (P), (S) delle condizioni alla superficie.

Esiste quindi attualmente, per così dire, una sconcordanza di metodo, poichè le condizioni alla superficie, di cui si tien conto per le onde (L),

sono invece trascurate per le onde (P) ed (S). Queste vengono così trattate come onde piane di uno spazio illimitato; il che è cosa ben diversa. Anche Lamb del resto nella sua Memoria: On the propagation of Tremors over the Surface of an elastic Solid [1], osserva: ..... *Lord Rayleigh's discovery of a special type of surface waves has made it evident, that the influence of the free surface in modifying the caracter of the vibrations is more definite and more serious that had been suspected.*

Noteremo qualche altra circostanza a favore della nostra ipotesi, senza naturalmente alcuna pretesa, che essa sia l'unica, o la migliore possibile.

L'osservazione ha dimostrato che le onde (L) hanno assai maggiore ampiezza e regolarità che le onde dei primi due gruppi. Ora, secondo il nostro modo di vedere, esse provengono da onde piane, nelle quali i piani d'onda degenerano in rette oscillanti, si perdono cioè alcuni vincoli del movimento, e si può quindi pensare che questa maggiore libertà permetta alle singole masse di oscillare più ampiamente e più regolarmente.

Ricordiamo, inoltre, che le onde fin qui considerate avvengono per intero nel piano di propagazione. Da ciò segue che il moto ondulatorio superficiale avviene soltanto nella direzione di propagazione, mentre l'osservazione rivela notevoli movimenti ondulatori anche nella direzione normale alla direzione di propagazione. Ora la maggiore generalità che abbiamo introdotto da principio per le onde piane permette, fino ad un certo punto, di far scomparire la limitazione indicata. Riprendiamo infatti gli integrali (3) della Nota precedente, di cui non ci siamo più occupati:

$$u_3 = 0 \qquad v_3 = \chi(\alpha x + \gamma z - \varepsilon t) \qquad w_3 = 0$$

colla condizione per le costanti

$$b^2(\alpha^2 + \gamma^2) = \varepsilon^2$$

ed alla superficie, cioè per $z = 0$,

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 0 .$$

Ora poniamo

$$\frac{\varepsilon}{\alpha} = b\sqrt{\eta} \qquad \text{e quindi} \qquad \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 = \eta - 1 ,$$

ove η indica una qualunque delle radici dell'equazione di Rayleigh, maggiori dell'unità. Potremo allora porre

$$v = \chi(z\sqrt{\eta - 1} + x - tb\sqrt{\eta}) + \chi(-z\sqrt{\eta - 1} + x - tb\sqrt{\eta})$$

[1] Philosophical Transanctions. vol. 203, 1904.

e saranno allora verificate le due condizioni a cui la v deve soddisfare. Avremo così un'onda che si propaga con velocità uguale ad una qualunque delle nostre coppie associate, e che darà luogo in superficie ad un movimento ondulatorio normale alla direzione di propagazione. Essa è composta di due onde piane; per l'una il piano d'onda coincide con quello delle onde (4'); per l'altra con quello dell'onda riflessa.

Analogamente potremo sovrapporre ad un'onda generalizzata di Rayleigh, un moto vibratorio dato da

$$v = \chi(iz\sqrt{1-\eta} + x - tb\sqrt{\eta}) + \chi(-iz\sqrt{1-\eta} + x - tb\sqrt{\eta})$$

che sarà anche reale se χ è reale.

Viene così a scomparire la limitazione precedentemente indicata.

Veniamo finalmente a qualche confronto numerico.

La teoria che abbiamo svolto non porta ad una determinazione numerica delle velocità di propagazione, anche quando sia dato il valore del rapporto di Poisson, che è il parametro variabile dell'equazione di Rayleigh. Essa ne assegna i valori all'infuori del fattore b, che rappresenta la velocità di propagazione delle onde trasversali. Risultano così determinati numericamente i valori dei rapporti delle tre velocità superficiali, quando sia dato il valore di σ. Prendendo per σ il valore comunemente ammesso 1,4, abbiamo visto che i valori delle radici dell'equazione di Rayleigh sono

$$\eta_1 = 4 \qquad \eta_2 = 3,1547 \qquad \eta_3 = 0,8453 .$$

Indicando perciò con V_1 , V_2 , V_3 i valori delle corrispondenti velocità di propagazione superficiale, troviamo

$$(7) \qquad \frac{V_1}{V_2} = 1,12 \qquad \frac{V_1}{V_3} = 2,17 \qquad \frac{V_2}{V_3} = 1,93.$$

Ora se prendiamo i valori medî delle velocità di propagazione delle onde (P), (S), (L) riportati da De-Marchi [1] nella seconda delle sue Note, che sono, in chilometri per secondo,

$$V_P = 10,47 \qquad V_S = 6,12 \qquad V_L = 4,02$$

troviamo

$$(8) \qquad \frac{V_P}{V_S} = 1,71 \qquad \frac{V_P}{V_L} = 2,60 \qquad \frac{V_S}{V_L} = 1,52 .$$

Il valore precedente per V_L rappresenta una media di massimi valori osservati. Prendendo invece il valore $V_L = 3,10$ che rappresenta una media di minimi, si trova

$$(9) \qquad \frac{V_P}{V_L} = 3,37 \qquad \frac{V_S}{V_L} = 1,97 .$$

[1] Rend. Accad. Lincei, 1° sem. 1916, pag. 506

Possiamo quindi dire che l'accordo fra i valori (7) ed i valori (8) o (9) è abbastanza soddisfacente. Lo è certamente per quanto riguarda l'ordine di grandezza. Nè possiamo pretendere molto di più, poichè conviene osservare che il confronto avviene fra quantità, di cui non sappiamo bene entro quali limiti siano paragonabili, poichè non conosciamo con precisione l'influenza della curvatura della terra sulla velocità di propagazione.

Inoltre dobbiamo tener presente che non grande è la precisione raggiungibile nella determinazione sperimentale delle velocità. E più ancora l'altra circostanza che i valori precedenti delle η_1, η_2, η_3 sono calcolati nell'ipotesi $\sigma = 1/4$, che non è punto obbligatoria. Noi potremmo quindi cercare di migliorare l'accordo coi dati d'osservazione, con piccole variazioni di questo valore del coefficiente di Poisson. Anzi potrebbe essere questa una via per determinare effettivamente il valore di questo coefficiente per la terra, presa nel suo insieme, in base ai dati delle osservazioni sismiche, anzichè dedurlo dai valori che esso ha pei materiali componenti la superficie terrestre, come si fa ordinariamente.

Ad ogni modo ci sembra che dal confronto coi dati d'osservazione per le velocità di propagazione non possano sorgere serie obbiezioni contro il modo di vedere esposto nella presente ricerca.

E finalmente, all'infuori di qualsiasi ipotesi, o interpretazione dei risultati meccanici ottenuti, ci sembra fuori di discussione il fatto, che se si ammette l'esistenza delle onde superficiali di Lord Rayleigh nel suolo, come è comunemente accettata, sia pur necessario ammettere l'esistenza nel suolo anche delle nuove onde, di cui abbiamo studiato le principali caratteristiche.

Spetta ai sismologi il decidere quale sia il posto che conviene di assegnare ad esse, nella teoria meccanica delle oscillazioni del suolo.

Chimica. — *Analogie fra derivati dell'ossigeno e dell'azoto.* Nota II del Socio A. Angeli.

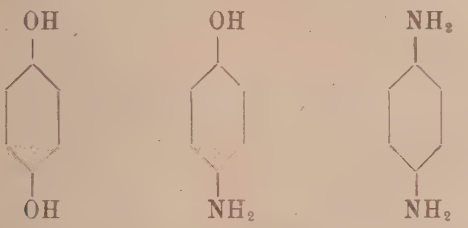
Le considerazioni che formano argomento della presente Nota rappresentano un seguito di quelle che qualche anno addietro ho comunicate a questa Accademia, in una Nota che porta lo stesso titolo (1), e che si riferiscono alle sorprendenti analogie di comportamento che presentano l'acqua ossigenata, idrossilammina, idrazina:

$$\begin{array}{ccc} OH & OH & NH_2 \\ | & | & | \\ OH & NH_2 & NH_2 \end{array}$$

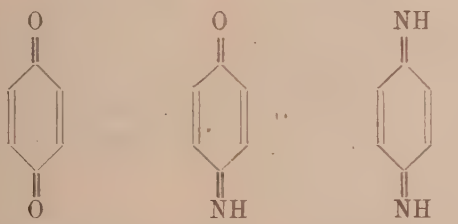
ed i loro derivati.

(1) Questi Rendiconti, *19* (1910), 2° sem., 94. Conf. anche O. Diels e M. Paquin, Berliner Berichte, *46* (1913), 2002.

In questi casi i gruppi (OH) ed (NH_2), come ognuno vede, sono uniti fra di loro direttamente; ma un attento esame dei fatti finora conosciuti dimostra che queste analogie sussistono ancora quando tali residui sono separati gli uni dagli altri, e precisamente quando si trovano in posizione para ovvero orto di un anello aromatico. Considerando p. e. i termini [1]:

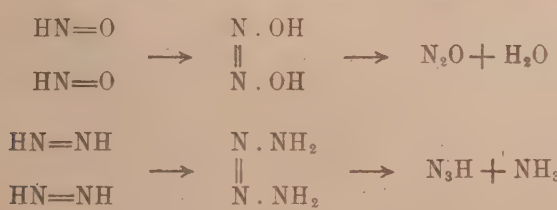


si nota che queste sostanze, ossidate nelle opportune condizioni, forniscono i prodotti:



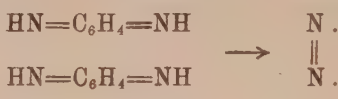
vale a dire i chinoni, le chinonimmine e le chinondiimmidi, che corrispondono a quelli che forniscono i termini più semplici:

Questi due ultimi sono instabilissimi ed hanno una grande tendenza a polimerizzarsi e successivamente a scindersi in vario modo; infatti si ha:



[1] Queste sostanze agiscono da rivelatori fotografici, e come rivelatori si comportano anche acqua ossigenata, idrossilammina ed idrazina, ma non trovano impiego a questo scopo perchè il processo di riduzione è accompagnato da sviluppo di gas che deforma lo strato sensibile e quindi l'immagine.

Come ha trovato E. v. Bandrowsky [1] anche la chinonimmina può dare un polimero, di cui ancora non è stata fissata la costituzione, e come hanno dimostrato le belle ricerche di R. Willstätter ed A. Pfannenstiel [2] l'o-chinondiimmide fornisce con tutta facilità l'o-azoanilina:



I derivati chinonici, come è noto, si addizionano all'acido benzolsolfinico [3] ed i composti:

$$C_6H_5 . SO_2 . NH . OH \qquad C_6H_5 . SO_2 . NH . NH_2$$

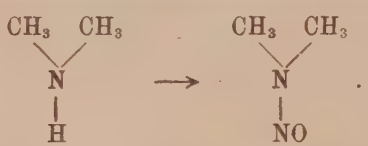
si possono a loro volta considerare come prodotti di addizione dell'acido benzolsolfinico ai termini:

$$HN{=}O \qquad HN{=}NH .$$

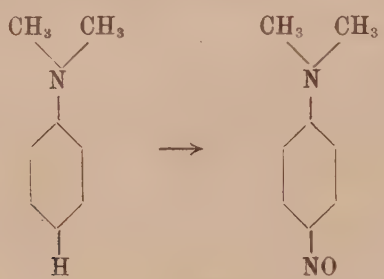
Questi pochi esempî dimostrano perciò che in questi casi tali gruppi, situati in posizione para ovvero orto, si comportano in alcune reazioni come se fossero direttamente uniti fra di loro; la stessa regola vale pure per altri residui, che si trovano nelle stesse condizioni, ed anche quando l'anello aromatico non assume la forma chinonica.

Citerò qualche esempio.

La dimetilammina per azione dell'acido nitroso fornisce la nitrosammina:



In modo identico si comporta la dimetilanilina:

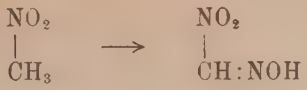


(1) Monatshefte, *10* (1889), 127.

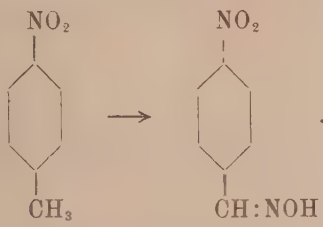
(2) Berliner Berichte, *38* (1905), 2350.

(3) O. Hinsberg, B. Berichte, *27* (1894), 3259 e seg.

Il nitroetano fornisce l'acido metilnitrolico:

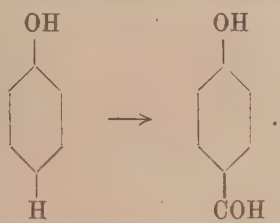


nello stesso modo che dal p-nitrotoluolo si ha l'ossima (1):

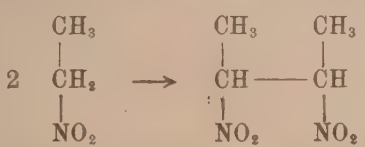


Cloroformio ed alcali dànno acido formico:

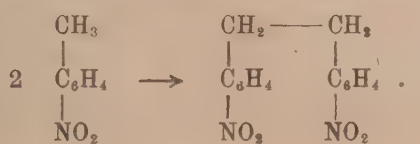
e la reazione è analoga alla sintesi delle ossialdeidi aromatiche di Tiemann:



Qualche anno addietro venne realizzata anche la trasformazione (2):



la quale corrisponde all'altra che si può effettuare partendo dal p-nitrotoluolo:



(1) Angeli e Angelico. Questi Rendiconti, *8* (1899), 2° sem., 32.
(2) Angeli e Alessandri. Questi Rendiconti, *19* (1910), 1° sem., 784.

Gli esempî si potrebbero continuare, ma i pochi che ho riportati mi sembra che sieno sufficienti per dimostrare che, nei casi considerati, i due residui sostituenti, per quanto separati fra di loro dall'anello aromatico, si comportano come se fossero congiunti direttamente fra di loro. Mi sembra questo un carattere dei composti aromatici che, a quanto io sappia, finora da nessuno è stato posto in rilievo e che, molto probabilmente, permetterà di stabilire ulteriori analogie e di realizzare nuove trasformazioni.

Biologia. — *Nuovo contributo allo studio del gozzismo.* Nota preliminare del Socio B. Grassi e di G. Zanoni.

Nella Memoria pubblicata dal prof. Grassi e dalla dott. Miraldi (1) nel 1915, si accertava che le tiroidi di ratti albini allevati a Losanna, le quali erano state giudicate normali, si presentavano in realtà più grosse di quelle dei ratti albini allevati a Roma. Per vedere se questo fenomeno occorresse anche altrove, furono esaminati sei ratti albini nati e cresciuti a Zurigo e ottenuti dal prof. Grassi per mezzo del prof. Silberschmidt. Si è verificato che anche questi ratti, in confronto con altri pure albini nati e cresciuti a Roma, presentavano tutti, *per quanto molto lieve, un ingrossamento della tiroide*. Tali osservazioni, sebbene ancora in numero non sufficiente, pur sembrano confermare come anche a Zurigo le tiroidi siano normalmente alquanto ingrossate, in confronto a quelle di Roma, che non hanno dato mai accenno di gozzo, e anzi restano sempre entro limiti determinati, come è risultato da numerosi dati raccolti a più riprese.

Nel proseguimento delle iniziate ricerche, uno di noi (Grassi), essendosi assentata la Miraldi, credette opportuno di associarsi un'altra collaboratrice (Zanoni). Essa intraprese anche lo studio istologico delle tiroidi dei ratti albini e selvatici di località gozzigena, comparativamente a quelli di Roma. Queste indagini sono ormai avanzate, e saranno da essa riassunte in una prossima Nota. Qui si tratta di riferire i nuovi esperimenti fatti in comune.

Nella Memoria sopra citata, gli esperimenti del Messerli a Losanna, in seguito alla constatazione che in quella città le tiroidi sono già normalmente ingrossate, furono interpretati nel senso che « per sè stessa, l'acqua che si beve non è gozzigena: essa però può esagerare molto la tumefazione di una tiroide già ingrossata e, se si vuole, già lesa: coloro che hanno creduto di ottenere lo sviluppo del gozzo col solo uso dell'acqua potabile in

(1) *Nuova contribuzione all'etiologia del gozzismo*. Annali d'Igiene sperimentale, vol. XXV, fasc. 3°, anno 1915.

località gozzigena, non hanno tenuto presente questo ingrossamento che precede, ovvero sorge per proprio conto contemporaneamente all'uso dell'acqua sospetta, se si tratta di mammiferi provenienti da località indenne ».

Per dare a tale interpretazione una conferma o meno, nello stesso paese (Montecelio) e nel medesimo locale, in cui si erano fatti i precedenti sperimenti, riferiti nella Memoria del prof. Grassi e della dott. Miraldi, ne furono intrapresi altri, somministrando però cibo e acqua del luogo. In tutti e quattro i ratti albini trattati in tal modo dalla fine di giugno 1915 alla fine di gennaio 1916, si ottenne un ingrossamento della tiroide *relativamente enorme*, quale non si era mai constatato in precedenza. Altri cinque ratti della stessa serie, in cui l'esperimento si prolungò fino al principio dell'aprile (1916), presentarono un ingrossamento ancora alquanto superiore. È vero che già nei primi quattro ratti la prova era durata qualche settimana di più che quelle precedenti, ma tale piccola differenza di tempo non basta da sola a spiegare la grandissima differenza dei risultati.

Abbiamo tuttavia ritenuto opportuno ripetere la prova; senonchè i ratti tenuti a Montecelio da gennaio a luglio del 1916 diedero alla sezione un esito inaspettato, in quanto, tranne un caso in cui vi era evidente ingrossamento, presentavano tiroidi solo lievissimamente ingrandite, coincidendo il peso di queste coi massimi riscontrabili a Roma. Resultato analogo presentava pure un altro ratto della stessa serie mantenuto a Montecelio fino al novembre dello stesso anno, ed un altro nato da esso in giugno e vissuto pure fino al novembre.

Nuove indagini fatte nel frattempo sui ratti selvatici viventi in libertà a Montecelio, per poter definitivamente stabilire se presentassero o no la tiroide un po' ingrossata, hanno dato anch'essi risultati negativi, come pure quelle eseguite su alcuni di tali ratti mantenuti in gabbia dal maggio al novembre.

Contemporaneamente si mantenevano a Roma ratti albini in un ambiente chiuso, poco aereato, dove era stata accumulata gran copia di spazzatura ed altro materiale di rifiuto raccolto a Montecelio, onde vedere se fosse in tal modo possibile provocare a Roma lo sviluppo del gozzo. I resultati ottenuti furono negativi, ma ad essi non si può dare un valore decisivo, poichè il materiale usato è stato raccolto a Montecelio nel periodo in cui, come sopra si è detto, anche sul luogo non si poterono ottenere che molto scarsi risultati.

Quanto qui abbiamo riferito, mentre ci ricordava fenomeni analoghi verificatisi a Zurigo [come risulta dalla Memoria di L. Hirschfeld e R. Klinger: 1915 (1)], ci faceva supporre che l'ambiente, dove sperimentavamo, fosse in un certo senso esaurito; onde si è cercato di rinnovare l'esperimento, ma in

(1) *Experimentelle Untersuchungen über dem endemischen Kropf.* Archiv für Hygiene. Bd. 85, 4 Heft.

altro locale, mentre si mantenevano però anche nel primo, per poter seguire con sicurezza l'andamento del fenomeno, due nuove serie di ratti, la seconda delle quali riceveva giornalmente, oltre alla comune dieta di pane, piccole dosi di latte. Di tali ratti, quelli finora esaminati (cinque della prima e tre della seconda serie) tornarono a presentare un gozzo spiccatissimo e molto più grande (tranne un sol caso) di quelli ottenuti dal Grassi colla Miraldi, usando l'acqua e il pane di Roma in esperimenti di durata non inferiore.

Bisogna inoltre ricordare che recentemente l'Arcangeli (1) annunciava, come semplice ipotesi di lavoro, senza alcun corredo di osservazioni proprie, che il gozzo endemico possa essere prodotto da un parassita, trasmissibile per via di ospiti intermedî, come le cimici; ma contro tale supposizione già presa da uno di noi (prof. Grassi) come punto di partenza nelle ricerche precedenti e poi abbandonata, si vengono a trovare in opposizione tutti i dati epidemiologici, primo quello che il gozzo è nettamente localizzato, trovandosi per es. a Montecelio e non a Roma. In ogni modo i ratti in esperimento furono seguiti anche da questo punto di vista, riguardo, cioè, ai loro parassiti, ma sempre con esito negativo.

Concludendo, i risultati qui brevemente riassunti conducono la nostra mente verso ricerche di microrganismi viventi nell'ambiente esterno e di influssi che essi possono eventualmente esercitarvi; veniamo così a trovarci in una direzione, fino a un certo punto, convergente con quella seguita da Hirschfeld e Klinger. Per continuare queste ricerche occorre coltivare i varî microorganismi dell'ambiente gozzigeno, ciò che abbiamo appunto iniziato in questo tempo particolarmente favorevole per lo sviluppo del gozzo, come risulta da quanto sopra si è riferito.

Botanica. — *Sulle forme fungine incluse nel ciclo di sviluppo della Lepiota cepaestypes* Sow. *e in quello della Lepiota* (*Agaricus*) *cretacea* Bull. Memoria del Socio Oreste Mattirolo.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle Memorie.

Matematica. — *Un tipo semplice di reti di reciprocità degeneri di 1ª specie tra spazî ad n dimensioni.* Nota di Eugenio G. Togliatti, presentata dal Socio C. Segre.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

(1) *Sull'etiologia del gozzo endemico e del cretinismo.* Rivista Ospedaliera (Sezione scientifica), anno 1916.

Matematica. — *Sulle omografie riemanniane di una matrice di Riemann.* Nota di Salvatore Cherubino, presentata dal Corrispondente G. Castelnuovo.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Mineralogia. — *Cianotrichite e dioptasia di Traversella* (1). Nota di Luigi Colomba, presentata dal Socio C. Viola.

In una delle mie ultime gite alle miniere di Traversella ebbi occasione di raccogliere alcuni esemplari di un minerale di tinta verde azzurra; essi provenivano dalla parte più interna di una galleria del giacimento di Riondello (2) ed erano in parte costituiti da minuscole stalattiti appese al tetto della galleria ed in parte da sottili incrostazioni ricoprenti alcuni frammenti di roccia. Tanto le une quanto le altre provenivano dallo stesso punto della galleria e, poichè era certa la loro origine secondaria dovuta a deposito da acque di infiltrazione, dovevano derivare dallo stesso stillicidio.

Sebbene gli esemplari apparissero fortemente inquinati da depositi contemporanei o posteriori argillosi e limonitici, potei tuttavia ricavarne alcuni frammenti sufficientemente sani e puliti che mi permisero di compiere alcuni saggi ed alcune osservazioni bastanti per determinare la loro composizione chimica ed i loro caratteri; essi anzi mi persuasero che tanto le stalattiti quanto le incrostazioni dovevano riferirsi alla stessa specie minerale.

Il minerale, trattato con acido cloridrico anche non concentrato e freddo, si scioglie completamente colorando la soluzione in verde; in detta soluzione si può facilmente riconoscere la presenza del rame, dell'alluminio, del calcio e dell'acido solforico. Per riscaldamento esso perde una grande quantità di acqua, dando contemporaneamente luogo ad un abbondante sviluppo di vapori acidi dovuti ad anidride solforica; continuando il riscaldamento fino alla completa eliminazione dei prodotti volatili, rimane un residuo brunastro che si scioglie parzialmente nell'acido cloridrico, dando una intensa colorazione verde alla soluzione e lasciando un residuo pulverulento bianco.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Modena.

(2) L. Colomba, *Ricerche sui giacimenti di Brosso e Traversella*. Parte 2ª. Mem. della R. Acc. delle Scienze di Torino, serie II, vol. LXVI, n. 3 (1915).

Trattando il minerale con ammoniaca, esso si colora in azzurro: in seguito si scioglie parzialmente colorando la soluzione in azzurro e lasciando un residuo bianco, gelatinoso che va però a poco a poco rapprendendosi. Tanto questo residuo quanto quello prima accennato, opportunamente trattati, rivelano essenzialmente la presenza dell'alluminio.

Alcuni saggi quantitativi mi diedero i seguenti risultati:

CuO	=	47,64
CaO	=	3,32
Al_2O_3	=	7,83
SO_3	=	15,62
H_2O	=	[25.59]
		100.00

Non posso però affermare per quanto riguarda l'acqua, determinata semplicemente per differenza, che i risultati da me ottenuti debbano essere considerati come esatti in modo assoluto, per il fatto che, pur avendo scelto con la massima cura il materiale impiegato nell'analisi, non potei eliminare completamente le impurezze e le sostanze estranee; ne consegue che la quantità di acqua deve essere, sebbene di poco, inferiore. Non credo invece che esistano differenze apprezzabili nei rapporti reciproci degli altri componenti.

Riguardo ai caratteri strutturali si hanno alcune differenze negli esemplari, a seconda che si tratti di stalattiti o di incrostazioni; nelle prime il minerale è sempre in laminette molto sottili, aggregate in modo da dar luogo ad una struttura raggiata intorno all'asse delle stalattiti; nelle seconde invece si hanno prevalentemente minutissimi cristalli aciculari, i quali però, quando hanno dimensioni maggiori, tendono anch'essi ad assumere un abito lamellare: si può quindi concludere che le differenze esistenti fra i due tipi di esemplari non sono affatto sostanziali, dipendendo esclusivamente dalle speciali condizioni nelle quali avvenne il loro deposito.

Al microscopio le lamelle e gli aghetti si presentano perfettamente trasparenti e pressochè incolori; solo quando si tratta di aggregati di un certo spessore comparisce in essi la caratteristica tinta verde-azzurra, senza alcuna traccia di pleocroismo. La birifrazione è molto debole ed i colori di polarizzazione non superano mai il grigio anche nelle lamelle di un certo spessore. Le estinzioni sono sempre rette, avvenendo sempre parallelamente ai lati delle lamelle, tanto sulle loro facce di maggiore sviluppo, quanto normalmente ad esse; si può quindi ammettere che il minerale appartenga al sistema rombico.

Sebbene la perfetta trasparenza ed il comportamento ottico dei cristalli lamellari ed aciformi non lasciasse alcun dubbio sulla loro omogeneità, ho creduto utile di compiere alcune osservazioni chimico-microscopiche per accertarmi se la composizione chimica piuttosto complicata rivelata dall'ana-

lisi, dovesse realmente considerarsi come corrispondente ad essi e non ad una miscela meccanica di varie sostanze, una delle quali sarebbe appunto stata rappresentata dalle lamelle e dagli aghetti.

A questo scopo ho studiato al microscopio il comportamento dei detti cristalli in presenza all'ammoniaca ed in presenza all'acido cloridrico; in questo secondo caso, dopo averli sottoposti ad un forte riscaldamento. In tal modo mi sarebbe stato possibile di stabilire se il residuo bianco insolubile gelatinoso o pulverulento ottenuto nelle dette reazioni e riferibile a composti di alluminio, dovesse considerarsi come veramente faciente parte dei cristalli oppure di qualche altra sostanza meccanicamente mescolata con essi.

Le mie osservazioni, mentre per un lato mi hanno condotto alla conclusione che il detto residuo deve, a seconda dei casi, riferirsi ad idrato oppure ad ossido di alluminio, per altro lato mi hanno persuaso che esso è da considerarsi come un vero componente del minerale verde azzurro.

Esaminando al microscopio il modo di comportarsi delle lamelle sotto l'azione dell'ammoniaca ho notato che esse dapprima si colorano in azzurro in modo perfettamente uniforme su tutta la loro superficie; in seguito la sostanza azzurra, dovuta, come è noto, ad un solfato cupri-ammonico, si scioglie rimanendo un residuo bianco, gelatinoso, molto leggero, costituito da idrato di alluminio, il quale mantiene completamente la forma iniziale delle lamelle; a nicols incrociati si nota che contemporaneamente a detta reazione, la birifrazione diminuisce rapidamente ed in poco tempo scomparisce, essendo il residuo bianco isotropo.

Scaldando le lamelle esse assumono dapprima una tinta verde-gialliccia nettamente visibile anche in quelle che per la loro sottigliezza in condizioni ordinarie sembrano incolori; continuando il riscaldamento, la tinta diviene gradatamente più cupa e, passando per il verde-brunastro e per il bruno-giallastro, giunge al bruno schietto; in tali condizioni le lamelle perdono completamente la trasparenza ed incominciano a fessurarsi in causa della eliminazione dei prodotti volatili; la tinta delle lamelle poi, in ogni momento, è sempre uniforme su tutta la loro superficie.

Trattando le lamelle così scaldate con acido cloridrico, esse si sciolgono parzialmente e, mentre la soluzione si colora in verde, rimane un residuo bianco, isotropo il quale, al pari del precedente, mantiene la forma delle lamelle e dei loro frammenti; esso però non ha l'aspetto gelatinoso ed è formato da ossido di alluminio.

Per ciò che si riferisce alle piccole quantità di ossido di calcio rivelate dall'analisi, pur non potendo escludere che almeno in parte costituiscano un vero componente del minerale, credo più logico di ammettere, in conseguenza di alcuni saggi da me compiuti, che esse provengano da piccole quantità di gesso meccanicamente mescolate; fatto questo per nulla straordinario quando si pensi alla facilità con la quale il gesso può formarsi, come pro-

dotto secondario, in un giacimento minerario così ricco di solfuri e di calcari, quale è appunto quello di Riondello.

In base a queste considerazioni, eliminando contemporaneamente al calcio anche le corrispondenti quantità di anidride solforica e di acqua richieste per formare il gesso, la composizione centesimale del minerale da me analizzato verrebbe ad essere la seguente:

CuO	=	53,05	0,666	7,83
Al_2O_3	=	8,72	0,085	1,00
SO_3	=	12,11	0,151	1,89
H_2O	=	[26,12]	1,451	17,07
		100,00		

Da questi rapporti molecolari si deduce che il detto minerale, malgrado la complessità della sua formola, può riferirsi, come varietà, alla *cianotrichite*.

Se si considerano le analisi note per la detta specie, è facile di osservare come i rapporti molecolari da esse desunti siano molto variabili. Queste analisi, che, per quanto mi consta, sono cinque, hanno dato i risultati seguenti:

	CuO	CaO	Al_2O_3	Fe_2O_3	SO_3	H_2O	res. ins.	Totale
1) Moldavia [Percy (1)] . .	48,16	—	11,70		15,39	23,06	—	98,30
2) » » . .	46,59	-	11,06	1,18	14,12	23,06	2,35	98,36
3) Cap Garonne [Pisani (2)]	49,00	2,97	11,21	1,41	12,10	22,50	—	99,19
4) Arizona [Genth (3)] . .	46,71	—	16,47	1,34	12,49	21,89	0,44	99,34
5) Utah » . .	49,54	—	15,45	0,91	12,60	[21,50]	—	100,00

Ad esse anzi, date le grandi analogie chimiche, si possono anche aggiungere le tre analisi di *woodwardite* della Cornovaglia, dovute a Church ed a Warington, poichè, sebbene la detta specie sia stata da taluno considerata come derivante da una miscela di langite e di idrato di alluminio, nulla giustifica una tale ipotesi, risultando invece molto chiari i suoi rapporti colla cianotrichite se si ammette che l'alluminio costituisca un vero componente. Queste analisi hanno dato i risultati seguenti:

	CuO	Al_2O_3	SO_3	H_2O	Totali
1) Church (4)	48,34	17,97	13,95	18,48	98,74
2) Warington (5) . . .	48,67	18,64	13,04	[19,65]	100,00
3) » . . .	46,80	17,63	12,54	[22,73]	100,00

(1) Phyl. Magaz. (1850), 36, pag. 100.

(2) C. R. de l'Ac. de France (1878), 86, pag. 1418.

(3) Am. Journ. of Science (1890), 40, pag. 118.

(4) Chem. News (1866), XIII, 85, pag. 113. Journ. of Chem. Soc. (1866), XIII, pag. 130.

(5) Id. id.

Ricavando da queste otto analisi di cianotrichite e di woodwardite i rapporti molecolari e disponendole in ordine ai valori che in esse assume l'ossido di rame in rapporto ai sequiossidi uguagliati all'unità, si ottiene la seguente tabella nella quale ho pure riportato i rapporti molecolari corrispondenti al minerale di Traversella (nell'analisi n. 3 ho calcolato tutti i sesquiossidi allo stato di Al_2O_3):

	CuO	CaO	Al_2O_3	Fe_2O_3	SO_3	H_2O	$\overset{''}{R}O$	$\overset{'''}{R}_2O_3$	SO_3	H_2O
1) Minerale di Traversella	0,666	—	0,085	—	0,151	1,451	7,83	1,00	1,89	17,07
2) Cianotrichite di Cap Garonne	0,615	0,053	0,109	0,009	0,151	1,250	5,66	»	1,28	10,60
3) Id. di Moldavia (an. 1ª)	0,605	—	0,114	—	0,192	1,281	5,30	»	1,68	11,24
4) Id. » (an. 2ª)	0,585	—	0,108	0,007	0,176	1,281	5,09	»	1,53	11,14
5) Id. dell'Utah	0,622	—	0,151	0,006	0,157	1,194	3,96	»	1,00	7,60
6) Woodwardite (an. 1ª) .	0,607	—	0,176	—	0,174	1,027	3,50	»	0,99	5,90
7) Cianotrichite dell'Arizona	0,587	—	0,161	0,008	0,156	1,216	3,47	»	0,86	7,19
8) Woodwardite (an. 2ª) .	0,612	—	0,182	—	0,163	1,092	3,36	»	0,90	6,00
9) Id. (an. 3ª) .	0,590	—	0,175	—	0,157	1,263	3,35	»	0,90	7,20

Da questa tabella, a mio parere, risulta chiaramente che il minerale di Traversella costituisce una varietà di cianotrichite, differente dalle altre attualmente note sotto il nome di cianotrichite e di woodwardite, per una maggiore ricchezza in acqua ed una minore ricchezza in alluminio. Nè credo che la mancanza in esso di pleocroismo, mentre invece sono sempre pleocroiche le altre varietà di cianotrichite, sia sufficiente per escludere l'esistenza di affinità fra i due minerali, potendo tale differenza di comportamento dipendere dal fatto che nel minerale di Traversella mancano quelle piccole ma non trascurabili quantità di sesquiossido di ferro presenti invece nelle altre cianotrichiti.

Raramente ho notato nelle stalattiti la presenza, sotto forma di individui isolati oppure di forme dendritiche, di un minerale di color verde smeraldo in cristalli prismatici, dotati di estinzioni rette. Questi cristalli hanno una discreta durezza, non sono intaccati dall'ammoniaca, l'acido cloridrico li scioglie parzialmente lasciando un residuo di silice gelatinosa; scaldati fortemente imbruniscono e, mentre perdono la trasparenza, si fessurano dando luogo a sviluppo di vapor d'acqua.

Sebbene non abbia potuto compiere altri saggi ed altre osservazioni, credo si possa ammettere che essi siano da riferirsi alla *dioptasia*.

Paleontologia. — « *Zuffardia* », *nuovo genere di Echinide del Senoniano della Tripolitania* (1). Nota di G. Checchia-Rispoli, presentata dal Socio C. F. Parona.

Durante i lavori delle varie Missioni incaricate dal Ministro delle Colonie di studî agro-geologici in Libia, negli anni 1912-1914, venne raccolto un abbondante materiale paleontologico comprendente tra l'altro una ricca collezione di Echinidi del Cenomaniano e del Senoniano. Il dottor Pietro Zuffardi dell'Istituto Geologico dell'Università di Torino, che fu aggregato a queste Missioni, si proponeva di compiere, insieme allo studio dei Coralli, anche quello degli Echinidi raccolti. Ma egli aveva appena iniziato il suo lavoro quando dovette interromperlo perchè richiamato sotto le armi. Purtroppo, dopo oltre un anno di vita al fronte, dove fu ferito già una prima volta, in seguito a gravi ferite riportate nell'aspro attacco notturno di Zugna Torta del 1° luglio dello scorso anno Egli serenamente si spegneva nell'Ospedale militare di Verona nel 28 dello stesso mese.

Per questa fatale circostanza tutto il materiale echinologico, con tanta cura raccolto dal compianto Collega, si trova ora nelle mie mani, affidatomi dalla benevolenza del prof. C. F. Parona, che io sento il dovere di ringraziare qui pubblicamente.

Il mio studio è pressochè ultimato; ma per le difficili circostanze del momento esso non potrà certamente venire pubblicato così presto, come sarebbe mio desiderio; perciò mi son deciso a pubblicare per ora la presente breve Nota destinata alla descrizione di un nuovo genere di *Cassidulidae*, che io avevo di già intravvisto studiando gli Echinidi raccolti dal Sanfilippo nella Tripolitania nel 1911 e che ora ho potuto definitivamente stabilire grazie al materiale messo a mia disposizione dal prof. Parona. Chiamo il nuovo genere *Zuffardia*, credendo di sciogliere in parte il mio debito di ammirazione verso la gloriosa memoria del Collega Zuffardi.

Gen. **Zuffardia** Checchia-Rispoli

Guscio di medie dimensioni e sottile.

Contorno ovale; faccia superiore elevata, convessa o subconica, rapidamente declive sui fianchi; faccia inferiore pianeggiante o debolmente convessa; margine arrotondato.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Paleontologia del R. Ufficio Geologico.

Apparecchio apicale centrale, monobasale, di forma pentagonale un po' allungata, munito di quattro pori genitali leggermente ovali, rigettati in parte negli interambulacri. Ocellari piccolissime situate ai vertici del pentagono.

Ambulacri subeguali, nettamente petaloidi, larghi, un po' aperti verso le estremità. Zone porifere sviluppate, formate di pori diseguali, disposti a paia obliqui separati da una costa sporgente e granulosa.

Peristoma un po' spostato avanti, piccolo, superficiale, pentagonale, stretto, allungato nel senso dell'asse antero-posteriore, circondato da fortissime e sporgenti protuberanze interambulacrali e da fillodi bene sviluppati.

Periprocto piccolo, superficiale, trigonale, appuntito in alto, situato nel mezzo della faccia posteriore.

Tubercoli piccolissimi, scrobicolati, stipati sulla faccia superiore, un po' più distanti e più grossi sulla inferiore.

Tipo: *Zuffardia Sanfilippoi* Checchia-Rispoli del Senoniano della Tripolitania (sub *Pseudocatopygus*) (1). Un'altra specie appartenente allo stesso genere è *Zuffardia Rohlfsi* Krumbeck sp. anche del Senoniano della Tripolitania (sub *Catopygus*) (2).

Rapporti e differenze. — Nel 1906 il Krumbeck nella descrizione del suo *Catopygus Rohlfsi* mise giustamente in rilievo la differenza che la nuova specie tripolina presentava con tutti gli altri *Catopygus* per la forma del periprocto caratteristicamente trigonale, in luogo di essere circolare od ovale. In seguito nel 1914 ho avuto occasione di occuparmi anch'io di questa specie, che ritrovai nel materiale raccolto dal Sanfilippo; inoltre facevano parte di detto materiale alcuni altri Echinidi, che non si potevano separare genericamente dal *C. Rohlfsi* Krumbeck. Tra gli altri caratteri, tanto i primi che i secondi, mostravano perfettamente identici l'apparecchio apicale, il peristoma, il periprocto e gli ambulacri. Credetti allora di separare gli uni e gli altri dai *Catopygus*, per riferirli, almeno provvisoriamente, al gen. *Pseudocatopygus* Cotteau et Gauthier, il di cui periprocto sembrava molto più vicino per forma a quello degli esemplari da me esaminati. Il nuovo materiale avuto ora a mia disposizione mi ha permesso di riprendere lo studio di queste specie e, per le ragioni che verrò esponendo, mi sento facoltato a separarle dai *Pseudocatopygus* ed a riunirle nel nuovo genere da me proposto.

(1) Checchia-Rispoli G., *Sopra alcuni Echinidi del Cretaceo superiore della Tripolitania raccolti dal cav. Ignazio Sanfilippo.* Giorn. Sc. Nat. ed Econ. di Palermo, vol. XXX, pag. 5 (dell'estratto), tav. I, fig. 8-8*e*. Palermo, 1914.

(2) Krumbeck L., *Beiträge zur Geologie und Palaeontologie von Tripolis.* Palaeontographica, vol. LIII, pag. 87, tav. VII, fig. 4 *a-d*, 1906-1907; vedi anche Checchia-Rispoli, loc. cit., pag. 5, tav. I, fig. 3-3 *b*.

Il gen. *Zuffardia* infatti si distingue da *Pseudocatopygus* (1) innanzi tutto per la costituzione dell'apparecchio apicale, che è centrale e *monobasale*, mentre nell'altro, oltre ad essere spostato avanti, risulta formato di quattro placche ben distinte, di cui l'anteriore di sinistra o 3 è più avanzata delle altre.

In *Pseudocatopygus* il peristoma pur essendo pentagonale non è mai stretto ed allungato come in *Zuffardia*, e non presenta affatto le fortissime sporgenze interambulacrali talmente pronunciate, che i fillodi vi si trovano ad essere come compressi. Notisi poi che il periprocto dei *Pseudocatopygus*, pur non essendo per la forma quello dei *Catopygus*, che è rotondo od ovalo, è sempre ovalare e non triangolare e si apre alla sommità della faccia posteriore, seguito in basso da un solco liscio, poco marcato, sino al margine inferiore del guscio.

Noto infine che gli ambulacri di *Pseudocatopygus* sono sempre subpetaloidi, poco sviluppati e con pori subeguali, mentre quelli di *Zuffardia* sono nettamente petaloidi, grandi e con pori diseguali.

Nè meno importanti sono le differenze con il gen. *Catopygus* Ag. Questo ha l'apparecchio apicale *etmofracto*, il periprocto rotondo od ovale, situato alla sommità di un'area verticale ben delimitata e gli ambulacri subpetaloidi, sempre molto aperti verso le estremità e con le zone porifere diritte e strette. Il *C. laevis* Agassiz di Maestricht (2), che più si avvicina per la forma del guscio a *Z. Sanfilippoi*, ha il peristoma più spostato avanti, il periprocto nettamente circolare situato alla sommità di un'area triangolare ben definita, l'apparecchio apicale conforme a quello del genere, cioè etmofracto, gli ambulacri del tutto aperti all'estremità e le zone porifere composte di pori poco dissimili.

I rapporti di *Zuffardia* con altri generi di *Cassidulidae* sono sempre più lontani e l'insistere sulle differenze può tornare del tutto superfluo.

(1) Cotteau et Gauthier, *Mission scientifique en Perse par J. de Morgan, Échinides fossiles*, pp. 63-65, 1895.

(2) D'Orbigny A., *Terrain Crétacé, Échinoïdes irréguliers*, pag. 442, tav. 971, 1853-1860.

Geologia. — *Sulla nozione del carreggiamento continuato.* Nota di G. Rovereto, pres. dal Corrisp. Arturo Issel.

Tutte le più recenti sintesi tettoniche, fra le quali mi sia permesso includere quelle di cui è parola in una mia Nota precedente, presentata a questa Accademia nella seduta del 17 dicembre 1916, inducono a credere che l'Appennino sia, almeno per gran parte, una regione di falde di ricoprimento; che in esso le parti autoctone si riscontrino limitate ai terreni neogenici, e, forse, a qualche regione dell'eocene.

Dopo questo, numerosi altri problemi tettonici si affacciano, che fra noi non sono ancora stati trattati, non ultimi quelli di stabilire: quali influenze e rapporti intercedono fra le circoscritte parti radicate e le trasportate; quali influenze modificatrici hanno avuto sulle falde di ricoprimento tutti i movimenti posteriori, che sono assai più complicati di quanto comunemente si ammette, perchè di più categorie, fra le quali da ricordarsi, in modo particolare, quelle dell'orogenesi attenuata, dell'epeirogenesi, degli affondamenti e degli smembramenti.

Le falde affioranti, e quindi direttamente constatabili, della Liguria, di cui sono esempî: la cerniera che, partendosi dal Colle di Tenda, da noi segnalata come zona di accavallamento sin dal 1903 (1) — prima discussione in Italia della teoria che ci interessa, e ciò anche a séguito di un lavoro di R. Baldacci e Franchi (2) sulla galleria ferroviaria attraverso tale colle —, attraversa diagonalmente lo spartiacque, continuandosi lungo la costiera di M. Bertrand-M. Saccarello; la finestra della valle della Neva sopra Albenga; la finestra del Santuario sopra Savona; le cerniere e il piano di carreggiamento del golfo della Spezia; poste in rapporto con i depositi oligocenici, indicano chiaramente che la loro traslazione è avvenuta prima del deposito degli strati dell'oligocene inferiore. Nell'Appennino Centrale, invece, gli strati dell'oligocene, e, con tutta probabilità, dell'oligocene medio o superiore, perchè a sole e piccole lepidocicline, come quelli stampiani della Liguria, sono inflessi conformemente agli eocenici; di modo che, se qui l'eocene è stato trasportato, lo fu dopo che in Liguria.

Però in Liguria, tale corrugamento post-stampiano non ha mancato di farsi sentire; perchè, contemporaneamente ad esso, si è iniziato quel grande sollevamento in curva, cui è dovuta la spartizione crinalica dell'Appennino; e la prova di ciò consiste nell'ingressione del mare aquitaniano, ben visi-

(1) Boll. Soc. Geol. Ital., pag. 415, 1903.
(2) Boll. R. Comit., Geol., n. 1, 1900.

bile fra Ponzone e Bagnasco, e che avvenne su di un'area continentale, racchiudente i varî bacini lignitiferi del cattiano o *firmitiano*, tra i quali, il più noto, quello di Cadibona. Questa curva di sollevamento, che ora si chiama epeirogenetica, è stata da me per la prima volta segnalata nel 1893 (1), ossia, un anno prima che il Gilbert ne risconoscesse altre simili nella regione dei Grandi Laghi, e introducesse il vocabolo che uso per designarla.

Dopo l'aquitaniano, tale curva si è a mano a mano accentuata, e ciò è provato dal fatto, che gli strati della serie neogenica, come tipicamente si osserva lungo la valle della Scrivia, aumentano di inclinazione col farsi più antichi; perchè i più antichi presentano sommati gli spostamenti, ossia le inclinazioni, di ciascun gruppo dei posteriori: ciò spiega, almeno in parte, se ai 10° di inclinazione del pliocene, ne succedono 15-25° per il miocene, 30-35° per l'oligocene.

Con queste premesse possiamo ammettere, che le superficie di carreggiamento debbono aver subìto delle deformazioni; e se le particolari condizioni del rilievo non ci permettono constatazioni come quelle fattesi attorno al massiccio autoctono dell'Aar, — dove il piano di scorrimento delle falde è stato posteriormente raddrizzato ed anche rovesciato, perchè tale massiccio si è a sua volta, verosimilmente per epeirogenesi, sollevato in massa, — non manca però in Liguria l'esempio di una condizione tettonica particolare, che deve essere il risultato di una deformazione, e di una rimessa in movimento della massa carreggiata.

Alle falde meridionali del massiccio serpentinoso di M. Pennello, alla distanza di alcuni chilometri dalla costa che si estende fra Voltri e Pegli, esiste una zona di breccie, stabilita fra i calcescisti del littorale e il massiccio stesso, che risulta molto addentro incuneata, perchè da essa scaturiscono, in parecchi punti, delle acque subtermali, che verosimilmente ne seguono il contatto. Ora, il nucleo di queste breccie è miocenico, perchè all'Acquasanta, come già ho segnalato, vi ho trovato un fossile di tale età; ma ai lati si hanno breccie di frizione, date da diverse specie recciose, che, triturandosi, poco si son miste con le contermini; per di più, nella valle del Branega, a monte della ferrovia, le breccie sono coperte dal massiccio serpentinoso, che ha carreggiato su di esse.

Quindi noi abbiamo qui il caso di un carreggiamento postmiocenico; e siccome non è ammissibile, per quello stesso ora dettosi, che di tale età sia avvenuta la produzione di falde, è necessario supporre, che una falda di ricoprimento antica, abbia ripreso il suo movimento, a sèguito del continuato sollevamento del rilievo montuoso, e che siasi più o meno comportata come una frana gigantesca.

(1) Atti Soc. Ligustica di Sc. natur. e geogr., vol. IV, tav. II, sez. 3ª, 1893.

È da questo fatto che io parto per stabilire la nozione del *carreggiamento continuato*, il quale rappresenta un terzo stadio nella evoluzione tettonica delle falde di ricoprimento; ritenendo con lo Schardt, che gli altri due stadî consistano nello scorrimento in profondità delle falde, e nelle successive compressioni orogeniche laterali e più superficiali. La nuova nozione può avere importanza, non solo come fatto tettonico a sè, ma anche come spiegazione genetica di movimenti sismici, di spostamenti con componente orizzontale delle masse montuose, e simili.

Non per nulla, nelle aree italiane di maggiore sismicità, ad esempio, attorno ai Peloritani e lungo la valle del Liri, affiorano delle superficie di carreggiamento, profondamente troncate dall'erosione.

Per dare maggior base al concetto, è utile riferirsi ad un'altra fronte di carreggiamento, assai più importante ed evidente di quella da me scoperta, ed è la falda che interessa i terreni miocenici del Veneto, i cui anormali rapporti con l'eocene, e con gli altri terreni più antichi, erano in passato spiegati con una faglia, ed ora lo sono con una piega-faglia: il Dainelli (1) ne ha in questi ultimi tempi messo in luce con cura i particolari.

Abbiamo colà l'eccezione che gli strati miocenici, a vece di coprire, non piegati, la base del rilievo alpino, sono in questo incuneati profondamente, ripetendosi il caso di Voltri; e formano un ristretto sinclinale, in varie foggie pressato, sino ad essere in qualche tratto ricoperto dalla serie del mesozoico e dell'eocene. Da ciò mi pare fondato trarre la supposizione, che il mare miocenico abbia troncato una falda di ricoprimento, e che questa in séguito, per l'innalzarsi del rilievo alpino, siasi posta in movimento, e che premendo sui nuovi depositi contro di essa accumulati, gli abbia piegati in sinclinale: continuando lo spostamento, la falda passò parzialmente su di essi, rigurgitando in contropendenza dal suo piano di carreggiamento.

Con la cognizione del carreggiamento continuato si viene inoltre a spiegare, come in alcuni casi siasi attribuito lo appilarsi delle falde di ricoprimento ad una età più recente del periodo orogenico propriamente detto, incorrendo con ciò in una apparente contraddizione.

Così, quando il Lugeon (2) constata per la prima volta, che al piede del versante settentrionale delle Alpi, sulla fine del miocene medio, le falde provenienti dal centro della catena giungono a ricoprire la molassa, distruggendone, salvo brevi tratti, come nel Friuli, la linea di costa, tutto ciò è spiegabile, in modo assai semplice, ammettendo, che l'innalzamento epeirogenetico della massa alpina, posteriore a tali strati miocenici, abbia rimesso in moto, sul loro letto antico, anche da questa parte della catena, le falde formatesi durante l'eocene.

(1) Boll. Soc. Geol. Ital., vol. XXIX, 1910.

(2) Compt. Rend. IX Congr. Géol. Intern., pag. 491, Vienna, 1904.

Non è improbabile, che al carreggiamento continuato possa essere qualche volta dovuto se le fronti o cerniere delle falde si impuntano, si ritorcono verso il basso, ed anche si accartocciano; fatto non isfuggito al Suess [1], che lo attribuiva, difatti, ad influenze di movimenti posteriori; nè è da tralasciarsi di ricordare che l'Arbenz [2] ha riconosciuto, come la resistenza esercitata sulla fronte delle falde da masse di *Nagelfluh* abbia prodotto, in tali falde, delle ondulazioni longitudinali; e che le culminazioni delle Alpi Elvetiche e Pennine, siano situate sul davanti dei centri di accumulazione del *Nagelfluh* stesso.

Botanica. — *Ulteriori ricerche intorno alla variazione di alcune specie di micromiceti* [3]. Nota II della dott. Elisa Mutto e del dott. Gino Pollacci, presentata dal Socio Giovanni Briosi.

In una prima Nota [4] abbiamo pubblicato alcuni risultati ottenuti con culture di *Phyllosticta pirina* Sacc. e di *Coniothyrium pirinum* (Sacc.) Sheldon, concludendo: che la specie *Coniothyrium pirinum* istituita da Sheldon va considerata come un sinonimo del *Coniothyrium tirolense* Bubàk, che la *Phillosticta pirina* Sacc. invece non è sinonimo del *Coniothyrium pirinum* (Sacc.) Sheldon e che i mezzi di cultura usati (decotto di foglie di melo; di patata; di agar glucosato; di barbabietola) influiscono semplicemente sopra le dimensioni, ma non sul colore delle spore delle due sopraddette specie.

C. H. Crabill [5] studiò egli pure la *Phyllosticta pirina* Sacc. e ne isolò 4 tipi. Secondo questo autore, i 4 tipi sono somigliantissimi.

I conidi unicellulari, ellittici, jalini sono identici; solo il micelio può essere differenziato per caratteri culturali.

In due di questi tipi si produssero clamidospore. Crabill si occupò anche del *Coniothyrium pirinum* (Sacc.) Sheldon, ossia del C. *tirolense* Bubàk, concludendo che è radicalmente diverso dalla *Phyllosticta pirina*; il che venne da noi confermato nella I^a nostra Nota.

Per la *Phyllosticta pirina* Sacc. in parecchi casi il detto autore osservò la formazione di organi speciali, somigliantissimi a spore di *Macro-*

(1) C. R. Acad. d. Scienc., 7 nov. 1904.

(2) Archiv. d. Sc. phys. et natur, pag. 422. Genève, 1912.

(3) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico di Pavia.

(4) *Ricerche intorno alle specie*: *Coniothyrium pirina* (Sacc.) Sheldon; *Phyllosticta pirina* Sacc. e *Coniothyrium tirolense* Bubàk, R. Accademia dei Lincei, vol. XXIV, serie V, 2° sem., fascicolo 1° (luglio 1915).

(5) C. H. Crabill, *Studies on Phyllosticta* and *Coniothyrium occurring on apple foliage*. Ann. Rep. Virginia Agric. Exp. Stat., 1911-12 pubbl. 1913, pp. 95-115, figg. 18-33.

sporium, bruni, clavati, plurisettati, ai quali dette il nome di *appressoria*, senza peraltro precisarne la funzione.

Durante lo studio da noi fatto di numerosissime culture di micromiceti di specie diverse sopra svariati mezzi culturali, allo scopo di studiare le loro variazioni morfologiche a seconda dell'ambiente, osservammo variazioni importanti nella specie *Phyllosticta pirina* Sacc., che qui riferiamo.

Il metodo da noi usato nelle nostre ricerche è sommariamente il seguente:

Abbiamo fatte culture con materiale pervenutoci dall' « *Association des Botanistes* » di Amsterdam ad essa inviato direttamente da C. H. Crabill: abbiamo confermato la determinazione della specie ed inoculato poi le spore nei seguenti mezzi culturali: patata, carota, barbabietola; mezzi gelatinizzati solidi: agar glucosato, mosto di birra, succo di limone neutralizzato con idrato di sodio (secondo gli insegnamenti di Duggar [1]) con 20 % di gelatina; mezzi gelatinizzati semi-solidi: succo di limone con 15 % di gelatina; succo di limone diluito con eguale volume d'acqua e con 15 % di gelatina.

Le culture da noi fatte erano lasciate alla temperatura di laboratorio 15°-18°-20° C, e alla luce alternata del giorno e della notte.

I mezzi semisolidi si mostrarono in generale poco favorevoli allo sviluppo dei funghi studiati, i quali male vi vegetavano.

Gli altri mezzi si mostrarono ottimi e in un periodo variabile che faremo noto ogni volta, ottenemmo le relative fruttificazioni. Per seguire giorno per giorno la biologia dei micromiceti usammo pure delle camere umide Van Tieghem, dove sul vetrino copri-oggetti una piccola porzione di mosto di birra gelatinizzato costituiva il terreno culturale su cui era inoculato il fungo da studiare.

Anzichè chiuso ermeticamente con vasellina o altro, il vetrino poteva (evitando con cura l'inquinamento) venir sollevato per deporre al fondo della camera umida una gocciolina di acqua sterilizzata che avrebbe mantenuto l'ambiente nella voluta umidità. Queste camere si mostrarono ottime; in esse potemmo seguire il completo svilupparsi della *Phyllosticta* in poco tempo ed osservare tutti i particolari dello sviluppo.

Riassumiamo per brevità nelle seguenti tabelle i risultati da noi ottenuti:

(1) B. M. Duggar, *Fungous diseases o plants* (*Ginn ad Company*. Boston).

Culture di Coniothyrium tirolense, Bubak.

Mezzo culturale	Data inoculazione	Data osservazione	Spore formatesi	Misure in μ	*Osservazioni*
Patata	6-4-15	25-1-16	olivaceo-chiaro	$7 \times 4,5$	
Carota	9-4-15	26-1-16	ombrine	$4,6 \times 2,3$	Spore ellittiche; alcune più ovoidali ($5 \times 3,5\ \mu$).
Agar glucos.	31-3-15	26-1-16	brune	$4,6 \times 3,5$	Spore ovoidali; poco più grandi ($5,7 \times 4\ \mu$).
Barbabietola.	9-4-15	26-1-16	olivaceo-bruno	$7 \times 3,5$	Alcune spore più piccole e più ovoidali ($4,6 \times 3,2\ \mu$).
Carota	26-1-16	17-3-16	ombrine	$11,5 \times 7$ $7,5 \times 5$ $7 \times 4,6$ $4,6 \times 3,5$	Spore normali ombrine ($7\text{-}7,5 \times 4,6\text{-}5\ \mu$). Alcune anormali molto grandi; altre più piccole e più chiare non ancora completamente sviluppate.
Barbabietola.	26-1-16	20-3-16	olivaceo bruno	11×7 $7,2 \times 4,6$ $4,6 \times 2,3$	Spore normali *olivaceo-brune* grandi ($11 \times 7\ \mu$), altre più piccole non completamente sviluppate.
Mosto di birra	26-1-16	27-3-16	ombrino chiaro	6×5 $4,6 \times 3,5$	Spore normali molto chiare ($6 \times 5\ \mu$).

Culture di Phyllosticta pirina Sacc.

Mezzo culturale	Data inoculazione	Data osservazione	Spore formatesi	Misure in μ	*Osservazioni*
Agar glucos.	26-1-16	28-3-16	jaline bacillari	$4 \times 1,5$ $10 \times 2,3$	
Gelatina di limone neutral.	26-1-16	11-4-16	jaline continue jaline settate 2-3 %	4,5-5 × 2,5-3	Nel micelio si differenziano forme speciali plurisettate-brune somiglianti a spore di *Macrosporium* (*appressoria* di Crabill).
Carota e patata	26-1-16	13-4-16	—	—	Non picnidi. Nel micelio abbondantissimi corpi plurisettati-bruni (*formazioni macrosporioidi*)
Mosto di birra (N. 1).	11-4-16	25-4-16	jaline continue jaline settate gialle settate	4,5-5 × 3,5 9-9,5 × 4,5-5 » »	Spore debolmente colorate con un setto trasversale. Nel micelio abbondanti formazioni *macrosporioidi*.

Culture di Phyllosticta pirina Sacc. *da spore provenienti da culture in mosto di birra.*

Mezzo culturale	Data inoculazione	Data osservazione	Spore formatesi	Misure in μ	*Osservazioni*
Carota	3-5-16	9-5-16	jaline continue	7 × 3	Spore normali. Non si osservano formazioni *macrosporioidi*.
Agar glucos.	3-5-16	10-5-16	jaline continue	9,5 × 4,5 7 × 3,5	Spore normali. Non si osservano formazioni *macrosporioidi*.
Gelatina di limone neutral.	3-5-16	11-5-16	jaline continue		Spore settate 2 %.
	3-5-16	3-6-16	jaline settate 2 %		
Patata	3-5-16	13-5-16	jaline continue	—	Spore normali. Formazioni *macrosporioidi* nel micelio.
Barbabietola.	3-5-16	15-5-16	jaline continue	12 × 4 7-8 × 3-4	Spore normali.
Mosto di birra (N. 2). . . .	3-5-16	12-5-16	jaline continue		Spore normali.
	3-5-16	3-6-16	jaline settate olivaceo chiare	—	Spore debolmente colorate con un setto trasversale. Formazioni *macrosporioidi* sul micelio.
In mosto di birra (N. 3) da colt. mosto di birra N. 2	5-6-16	16-6-16	jaline continue olivaceo chiare	—	Spore debolmente colorate. Formazioni *macrosporioidi* nel micelio.

Conclusioni.

1. I varî mezzi di cultura usati influirono sulle dimensioni e sulle tonalità di colore delle spore di *Coniothyrium tirolense* Bubàk.

2. Con determinato mezzo nutritivo (mosto di birra gelatinizzato) la specie che attualmente viene classificata come *Phyllosticta pirina* Sacc. produsse spore settate e debolmente colorate; cioè si trasformò in una specie avente i caratteri del genere *Ascochyta*. Anche in culture di gelatina di limone neutralizzato con idrato di sodio si ottennero alcune spore jaline settate.

3. Le spore si mantengono settate e debolmente colorate anche nelle nuove generazioni ottenute nello stesso mezzo culturale.

Restando identiche tutte le altre condizioni, ma cambiando il mezzo nutritizio, il carattere acquisito andò invece perduto, cioè nelle generazioni successive la specie ritornò a produrre spore non settate.

4. Durante la vita della cultura, mai però prima della formazione delle picnidiospore, la *Phyllosticta pirina* diede forme speciali clavate, plurisettate longitudinalmente e trasversalmente (*appressoria* di Crabill) che noi chiamiamo *macrosporioidi* per la loro stretta somiglianza con le spore del genere *Macrosporium*. Il Mercer W. B. che osservò per il *Phoma Richardiae* Mercer forme analoghe alle nostre, le attribuì invece al genere *Alternaria* e non a *Macrosporium*.

Le forme da noi studiate sono generalmente solitarie (perciò abbiamo creduto bene chiamarle *macrosporioidi*); se talvolta si riunivano in catene, apparivano *direttamente* clavate.

Ci riserbiamo di ritornare su tali ultimi speciali corpi per meglio stabilirne la natura e la funzione.

Fisiologia. — *Influenza dell'attenzione su la secrezione di succhi digerenti* [1]. Nota riassuntiva di Bruno Brunacci, presentata dal Socio Luigi Luciani.

Le presenti ricerche sono state eseguite sulla mia parotide di sinistra e su quelle degli studenti Tullio De Sanctis e Antonio Galamini che volenterosamente si sono prestati. In esse ho voluto ricercare se in luogo di un complesso lavoro psichico che in mie esperienze precedenti aveva provocato la diminuzione o l'arresto della secrezione glandolare [2], stimoli sensoriali semplici applicati contemporaneamente a quello gustativo avessero manifestato un'influenza simile sulla secrezione della saliva parotidea.

Lo *stimolo gustativo* usato fu per lo più una soluzione di acido acetico all'1 % e talvolta soluzioni di minore e di maggiore concentrazione (circa 10 cmc. introdotti e mantenuti in bocca e regolarmente rinnovati ogni 2′).

Gli *stimoli olfattivi* erano costituiti da odori *piacevoli* e *spiacevoli*. Tra i primi ho usato l'essenza di orchidee, l'essenza di ambra e quella di garofani applicate nel naso mediante un tubicino di vetro introdotto dentro

(1) Ricerche eseguite nel febbraio e marzo 1915 e nel novembre e dicembre 1916 nell'Istituto fisiologico di Roma diretto dal prof. sen. L. Luciani.

(2) Brunacci e De Sanctis, *Sulla funzione secretoria della Parotide nell'uomo*. Nota II: *Influenza dell'attività psichica sulla quantità e qualità della saliva secreta*. Arch. di Fisiol. vol. XII, 1914, pag. 441 segg. In tali ricerche il soggetto in esperienza, mentre aveva nella bocca la soluzione di acido acetico, scriveva in italiano, traducendole mentalmente dal francese, le Leçons, *Sur les propriétés des liquides de l'organisme*, di Cl. Bernard, che gli erano dettate.

la narice dello stesso lato della glandola in esame. In tale tubicino era un piccolo rigonfiamento olivare nel quale veniva collocato un batuffoletto di ovatta imbevuto dell'essenza che si voleva sperimentare. Tra gli odori *spiacevoli* ho adoperato il solfuro di carbonio e l'assa fetida.

Per gli stimoli *acustici* mi sono servito di diapason (diapason da 55 V.D. e da 615 V.D.) eccitati regolarmente ogni 5″ ed applicati dallo stesso lato della glandola in esame; oppure di stimoli *melodici* (suono di armonium e di violino).

Gli stimoli *luminosi* furono di intensità debole e forte, mentre la qualità di essi rimaneva la stessa (luce bianca di lampade elettriche da 10 e da 100 candele).

Inoltre, volendo precisare se il fenomeno inibitore sulla secrezione della parotide fosse più dovuto ad un fatto psichico di attenzione, anzichè all'intensità dell'eccitamento periferico, ho stimolato l'organo visivo dapprima con una intensa luce bianca omogenea (lampada Auer), e, dopo avere osservato l'effetto inibitore prodotto, ho notato l'effetto inibitore dovuto all'osservazione dell'immagine postuma cromatica che la lunga fissazione della luce bianca omogenea aveva provocato.

Come è noto le immagini postume cromatiche che si hanno in seguito alla fissazione della luce bianca sono ben visibili e proiettabili, per così dire, su schermi grigi debolissimamente illuminati. Tali immagini perdurano a lungo attraversando periodi di cromatismo più o meno intenso e periodi di totale scomparsa. L'individuo quindi che vuol vederle, seguendone le varie fasi di luminosità cromatiche e di oscuramenti deve rivolgere ad esse la propria attenzione nel modo più intenso.

Allo scopo, infine, di ricercare l'influenza di altri stimoli sensoriali applicati contemporaneamente a quello gustativo non solo sulla *quantità* del liquido secreto, ma anche sulla sua *qualità*, ho praticato su ciascuna specie di saliva, cioè su quella secreta durante la semplice applicazione dello stimolo gustativo, che per comodità di esposizione chiamerò *normale*, e su quella secreta durante l'applicazione contemporanea dei due stimoli che chiamerò *da inibizione*, l'analisi dell'alcalinità determinata con una soluz. $\frac{N}{10}$ di HCl (indicatore: arancio di metile); la conducibilità elettrica a 37° col ponte di Weatstone; ed in fine l'azoto totale con il metodo di Kjeldhal.

Mi limito, per brevità, a riportare soltanto le medie delle *velocità di secrezione* (= dcc. al 1′) ottenute durante l'applicazione del solo stimolo gustativo (*saliva normale*) e durante l'applicazione dei due stimoli (*saliva da inibizione*); e quelle delle analisi eseguite su le due differenti specie di saliva durante l'applicazione dello stimolo acustico melodico.

Tabella 1ª. — **Stimoli olfattivi.**

Saliva normale	Saliva da inibizione
(Sol. ac. acetico 0,03-0,05 %)	(Ac. acetico 0,03-0,05 % + olfattivo piacevole)
Velocità di secrezione = **2,6** (media di 6 esperienze).	Velocità di secrezione = **1.4** (media di 6 esperienze).
Saliva normale	Saliva da inibizione
(Sol. ac. acetico 1 %)	(Ac. acetico 1 % + stimolo olfattivo piacevole)
Velocità di secrezione = **8,0** (media di 7 esperienze)	Velocità di secrezione = **3,6** (media di 7 esperienze).
Saliva normale	Saliva da inibizione
(Ac. acetico 1 %)	(Ac. acetico 1 % + olfattivo spiacevole)
Velocità di secrezione = **11,8** (media di 6 esperienze).	Velocità di secrezione = **5,2** (media di 6 esperienze).

Tabella 2ª. — **Stimoli acustici.**

Saliva normale	Saliva da inibizione
(Sol. ac. acetico 1 %)	(Stimolo acustico debole Diapason 55 V. D. + ac. acet. 1 %).
Velocità di secrezione = **10** (media di 6 esperienze).	Velocità di secrezione = **4,9** (media di 6 esperienze).
Saliva normale	Saliva da inibizione
(Sol. ac. acetico 1 %)	(Stimolo acustico intenso Diapason 615 V. D. + ac. acet. 1 %).
Velocità di secrezione = **9,9** (media di 6 esperienze)	Velocità di secrezione = **5,8** (media di 6 esperienze).
Saliva normale	Saliva da inibizione
(Sol. ac. acetico 1 %)	(Stimolo acustico melodico + ac. acet. 1 %).
Velocità di secrezione = **9,8** (media di 6 esperienze).	Velocità di secrezione = **3,7** (media di 6 esperienze).

Tabella 3ª. — **Stimoli luminosi** (Cfr. Grafica 1ª).

Saliva normale	Saliva da inibizione	Saliva da inibizione
(Ac. acetico 0,75 %)	(Lampada elettrica da 10 candele + ac. acet. 0,75 %).	(Lampada elettrica da 100 candele + ac. acet. 0,75 %).
Velocità di secrezione = **7,3** (media di 4 esperienze).	Velocità di secrezione = **4,2** (media di 4 esperienze).	Velocità di secrezione = **3,3** (media di 4 esperienze).
Saliva normale	Saliva da inibizione	Saliva da inibizione
(Sol. ac. acetico 1 %)	(Lampada Auer + acido acetico 1 %).	(Immagine postuma + acido acetico 1 %).
Velocità di secrezione = **9,00** (media di 6 esperienze).	Velocità di secrezione = **5,3** (media di 6 esperienze).	Velocità di secrezione = **3,8** (media di 6 esperienze).

Tabella 4ª (Cfr. Grafica 2ª).

Saliva normale (Soluzione acido acetico 1 o/o)						Saliva da inibizione (Soluzione acido acetico 1 o/o + suono d'armonium)					
T in minuti primi	Q in dcc.	V $= \frac{Q}{T}$ in dcc.	Alcalinità in gr. o/o di KOH	Conduttiv. elettrica $10^5 . K_{37}$	Azoto totale gr. o/o	T in minuti primi	Q in dcc.	V $= \frac{Q}{T}$ in dcc.	Alcalinità in gr. o/o di KOH	Conduttiv. elettrica $10^5 . K_{37^0}$	Azoto totale gr. o/o
6',6	64 8	9 55	0.376	825	0.150	6',6	26	3,7	0 329	637	0 151
(Medie di 6 esperienze)											

Dal complesso delle esperienze risulta dunque che *la velocità di secrezione diminuisce di circa la metà durante l'applicazione contemporanea dei due stimoli* (gustativo e altro sensoriale) *e che tale diminuzione non è tanto in rapporto alla intensità degli stimoli applicati quanto all'attenzione rivolta sopra di essi.* Ciò risulta evidentemente nelle esperienze eseguite con lo stimolo acustico melodico e quelle fatte durante la fissazione di una luce bianca omogenea (lampada Auer) ed osservando poi l'immagine postuma cromatica provocata da essa.

Relativamente alle *variazioni qualitative* della saliva normale rispetto a quella da inibizione è risultato dall'insieme delle ricerche che l'alcalinità e la conducibilità elettrica diminuiscono col diminuire della velocità di secrezione, mentre il contenuto in azoto totale o non presenta variazioni, oppure se ne nota un leggero aumento nella saliva da inibizione. Ciò si vede chiaramente nella Tabella 4ª e nella Grafica 2ª, le quali si riferiscono alle esperienze eseguite applicando lo stimolo acustico melodico.

Un fatto importante osservato durante l'applicazione dei varî stimoli è stato che *quando la secrezione salivare era grandemente diminuita o anche del tutto sospesa, bastava che l'individuo in esperimento rivolgesse la sua attenzione allo stimolo gustativo che aveva in bocca perchè la secrezione ricomparisse.* Questo fatto è rappresentato chiaramente nelle due grafiche annesse (fig. 1, 2), le quali sono state ottenute iscrivendo su di un cilindro girante le gocce di saliva parotidea che cadevano dalla canula introdotta nel condotto di Stenone contemporaneamente ad un segnale che indicava il momento nel quale si diceva all'individuo di rivolgere la sua attenzione sull'uno piuttosto che sull'altro stimolo. Un contagocce elettrico connesso con un segnale elettromagnetico Desprez ed un tasto interruttore connesso con un secondo segnale Desprez hanno servito allo scopo, mentre il tempo veniva segnato in secondi da un orologio Jaquet.

Dall'analisi grafica del fenomeno si vede dunque *come il risultato inibitorio complessivo* rappresentato dalla riduzione a circa la metà della velo-

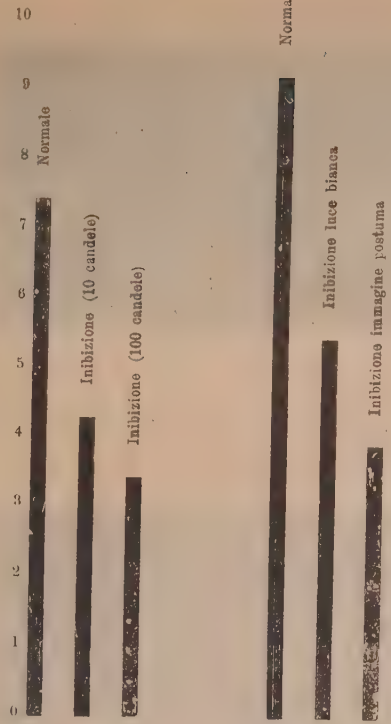
cità di secrezione, si possa scindere *in due fasi*, cioè in una fase nella quale la secrezione glandolare è più o meno vivace quando l'attenzione dell'individuo è rivolta sullo stimolo gustativo (*fase dell'effetto positivo dello stimolo adeguato e di agevolazione psichica*); ed in una seconda fase nella quale la secrezione glandolare è fortemente diminuita o anche del tutto sospesa allorche, cioè, l'attenzione dell'individuo in esperimento viene rivolta sull'altro stimolo sensoriale (*fase di inibizione psichica*).

Riflettendo ora al comportamento assai simile alle glandole salivari delle altre principali glandole dell'apparato digerente di fronte agli *stimoli psichici agevolatori* (stomaco, pancreas), come hanno fatto rilevare soprattutto gli studi del Pawlow (1), si può logicamente pensare che esse si comportino anche similmente di fronte *agli stimoli psichici inibitori* e che quindi i risultati sperimentali ottenuti da me dalla glandola parotide dell'uomo siano con moltà probabilità estensibili alle altre glandole digestive sulla cui secrezione avrebbe così una grande importanza anche l'*attenzione*.

(1) Pawlow J. P., *Die Arbeit der Verdauungsdrüsen*, Wiesbaden, 1898; id., *Die äussere Arbeit der Verdauungsdrüsen und ihr Mechanismus*, Nagel's Handb. d. Physiol., II, 660, 1907; id., *Sur la sécretion psychique des glandes salivaires*. Arch. intern. de physol., 1, 119, 1904; id., *Psichische Enegung der Speicheldrüsen*, Ergeben. d. Physiol., III-I, 177, 1904.

GRAFICA 1ª. — **Stimoli luminosi.**

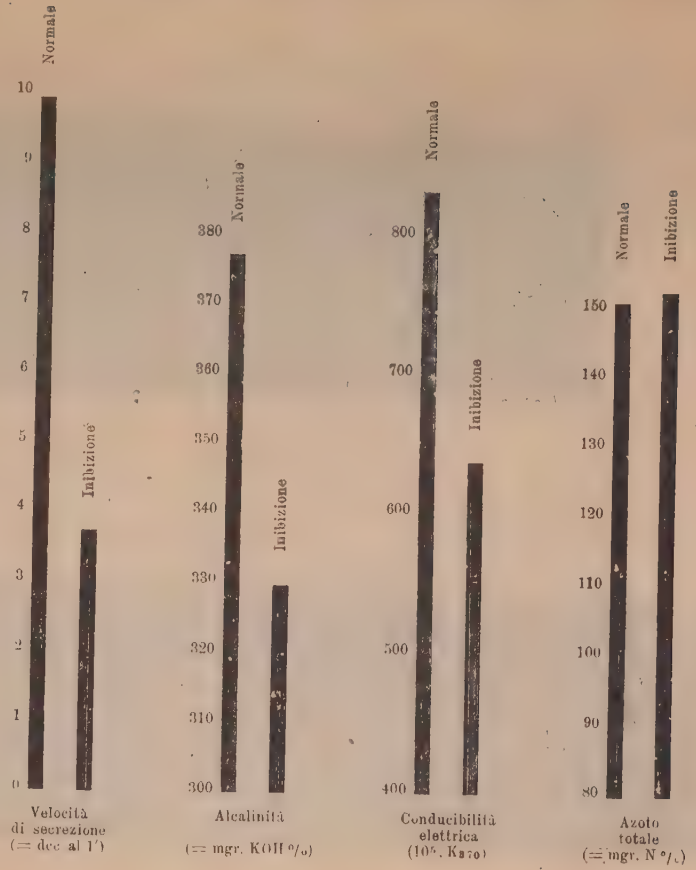
(Velocità di secrezione = dcc al 1')



Stimolo *luminoso debole*. Lamp. elettr. da 10 candele e *forte*: lamp. elettr. da 100 candele. Stimolo gustativo forte (Sol. ac. acet. 0,75 %)

Stimolo luminoso forte e immagine postuma cromatica. Stimolo gustativo forte (Sol. ac. acetico 1 %)

GRAFICA 2ª. — **Stimoli acustici armonici.**

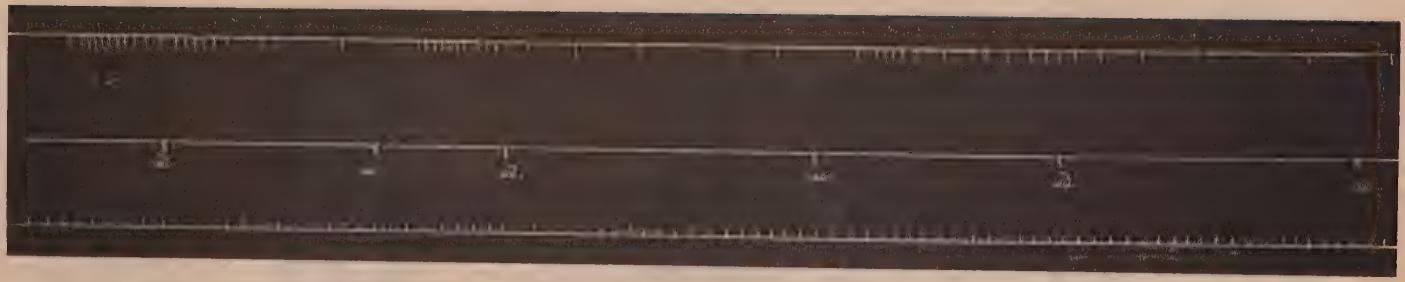


Velocità di secrezione (= dcc al 1')

Alcalinità (= mgr. KOH %)

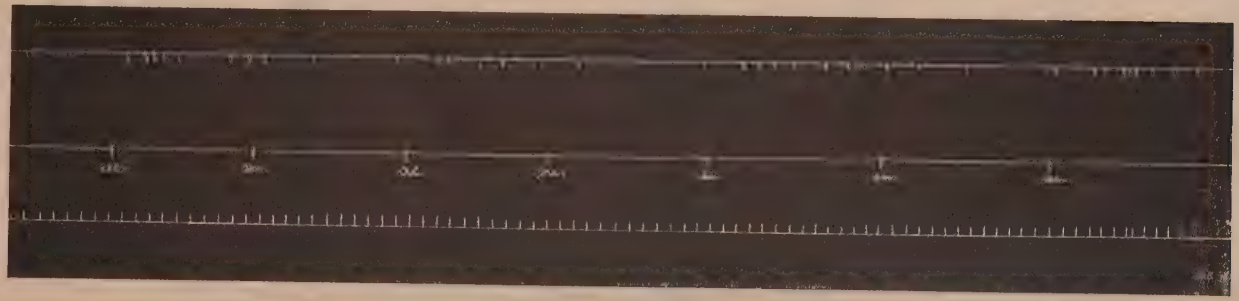
Conducibilità elettrica (10^6. $K_{18°}$)

Azoto totale (= mgr. N %)



(T. D. S.) Stimolo gustativo = soluzione di acido acetico all' 1 °/₀ (*ac.* = attenti all'acido!
Stimolo olfattivo = essenza di orchidee. (*od.* = attenti all'odore!
Tempo in secondi.

Fig. 1.



(B. Br.) Stimolo gustativo = soluzione di acido acetico 1 °/₀ (*ac.* = attenti all'acido!
Stimolo acustico = diapason da 55 V. D. (*su.* = attenti al suono!
Tempo in secondi.

Fig. 2.

Patologia vegetale. — *Un parassita delle patate nuovo per l'Italia: Spondylocladium atrovirens* Harz. Nota del dott. Beniamino Peyronel (1), presentata dal Socio G. Cuboni.

Nel novembre scorso, allo scopo di coltivare *Chalaropsis thielavioides* Peyron. sui tuberi vivi di patata, lavai accuratamente un certo numero di questi in acqua corrente, poi li immersi successivamente per parecchi minuti in una soluzione di sublimato corrosivo all'1‰, quindi in alcool etilico a 95°, li sciacquai in acqua sterilizzata in autoclave a 125° e ancora bollente, e li chiusi in altrettanti recipienti sterilizzati. Nonostante questi trattamenti fui non poco stupito di vedere, dopo qualche tempo, apparire sulla superficie di alcuni dei tuberi delle chiazze d'un nero-olivaceo molto intenso, prodotte da un ifomicete che mi fu facile determinare per *Spondylocladium atrovirens* Harz.

Durante l'inverno ritrovai lo stesso fungo su altri tuberi di patata provenienti dal mercato di Roma.

Questa demaziacea fu per la prima volta scoperta dal Harz su tuberi di patata a Vienna (2), ove la ritrovava più tardi lo Zukal, che la descrisse sotto il nome di *Cladosporium abietinum* (3). Saccardo riconduce la specie di Zukal al genere *Spondylocladium* (4) ed alla diagnosi latina aggiunge quest'osservazione: « Etsi conidia breviora descripta, species fere absque dubio est *Sp. atrovirens* Harz ». E difatti il Lindau (5) dà giustamente *Spondylocladium abietinum* (Zukal) Sacc. quale sinonimo di *Sp. atrovirens* Harz.

Dopo Zukal, Frank (6) descriveva sotto il nome di *Phellomyces sclerotiophorus* un fungo da lui osservato su numerose varietà di patate di moltissime regioni della Germania e che sarebbe capace talora di produrre una specie di marciume, che egli chiama « Phellomyces-Faüle ».

(1) Lavoro fatto nella R. Stazione di Patologia Vegetale di Roma.

(2) Harz, *Einige neue Hyphomyceten Berlins und Wiens* etc., Bull. soc. imp des sc. natur. de Moscou, 64, pag. 129 (1872); cfr. Sacc., *Syll.* IV, pag. 142.

(3) Zukal, *Neue Ascomyc.* etc., Verh. zool. bot. Ges. Wien. 37, pag. 44 (1887), tab. I, fig. 8.

(4) Saccardo, *Sylloge fung.* X, pag. 662 (1892).

(5) Lindau, *Hyphom.* II, pag. 142.

(6) Frank, *Kampfbuch*, pp. 182-185, 197-198 (1897); Berichte Deutsche Bot. Ges. 16, pag. 275 (1898).

Più recentemente Appel e Laubert (1) dimostrarono l'identità del *Phellomyces sclerotiophorus* collo *Sp. atrovirens*, di cui quello rappresenta semplicemente la forma vegetativa, cioè micelio ed ammassi sclerozioidei. Essi fecero uno studio assai accurato del fungo e lo illustrarono con belle figure. Un bello studio biologico e morfologico ne fece pure Eichinger (2).

Quasi certamente devesi pure riferire a questa stessa specie un fungo descritto e figurato dal Sorauer sotto il nome di *Helminthosporium* sp., e che produrrebbe sui tuberi di patata una malattia che l'autore chiama « Kartoffelgrind » (Scabbia delle patate) (3). Infatti l'*Helminthosporium* non è più descritto nella 3ª edizione del « Handb. der Pflanzenkrankheiten » (1908), mentre lo è lo *Spondylocladium*.

Oltrechè in Austria e in Germania, il fungo è stato trovato anche in Danimarca (4), in Inghilterra, ove fu segnalato per la prima volta in Irlanda dal Johnson (5) e più tardi ritrovato in Iscozia e studiato dal Massee (6); negli Stati Uniti d'America, ove se ne occuparono Clinton (7), Melhus (8), Orton (9), Rees (10), Bailey (11), e finalmente in Australia (12).

In Italia non era ancora stato fin qui segnalato e non è perciò descritto negli « Hyphales » del Ferraris in « Flora italica cryptogama ». Esso non deve, però, essere raro neanche da noi, ma è probabilmente sfuggito ai nostri patologi e micologi, sia perchè non è molto appariscente, sia perchè non sembra avere una grande importanza patologica.

Ecco in breve i principali caratteri del fungo quale ho potuto osservarlo sopra parecchi tuberi di patata.

(1) Appelund Laubert, in Ber. Deutsch. Bot. Gesellsch. 23, pp. 218-220 (1905); e in Arb. Kaiserl. Biol. Anst. 5, pag. 435 (1907).

(2) Eichinger, *Zur Kenntnis einiger Schalenpize der Kartoffel*. Ann. Myc. 7, pag. 356 (1909).

(3) Sorauer, *Handb. Pflanzenkrank., Zweite Aufl.*, 2, p. 359 (1886); Zeitschrift f. Pflanzenkr. 6, pag. 5 (1896).

(4) Rostrup, *Oversigt over Landbrugsplanternes Sygdomme i* 1904. Tidsskr. f. Landbrug. Planteavl XII, pp. 352-376 (Kjöbenhavn, 1905), XIII, pp 79-105 (1906).

(5) Johnson, in Econom. Proc. Roy. Soc. Dublin, I, pag. 161 (1903).

(6) Massee, in Kew Bull., Jan. 1909; *Diseases of cult. plants and trees*, pag. 438 (1910).

(7) Clinton, *Report of the botanist*. Connect. Agr. Expt. Sta. Rept. 1907-1908, pp. 357-359 (1908).

(8) Melhus, *Silver scurf, a disease of the potato*. U. S. Dept. Agr., B. P. I. Circ. 127, pp. 15-25 (1913).

(9) Orton, *Potato-tuber diseases*. U. S. Dep. Agric. Farm. Bull. 544, pag. 16, fig. 16 (1913).

(10) Rees, *Silver scurf disease*. West. Wash. Exp. Sta Mo. Bull. I, pp. 15-16 (1914).

(11) Bailey, *Notes on diseases from the northwest*. Phitopathology, 4, pag. 321 (1914).

(12) Brittlebank, in The Journ. of the Dep. Agric. Victoria, Australia, 12, pp. 400-403 (1914).

Sull'epidermide dei tuberi si osservano delle aree di varia grandezza, da pochi mm. a parecchi cm. di larghezza, ricoperte di numerosissimi puntini formanti una macchia nero-olivacea affatto superficiale. Se si esaminano con una lente o sotto il microscopio a debole ingrandimento, si vede che esse sono formate talora esclusivamente da minuti puntini oscuri, ma più spesso da una foresta di minuscoli alberetti simili a conifere: sono i conidiofori.

Le ife miceliche sono generalmente di due sorta: le une, più sottili, grosse appena 2-4,5 μ, sono in parte immerse nelle cellule peridermiche ed ivi ialine o subialine, in parte superficiali e bruno-fuliginee, settate, ramose; le altre sono più grosse, 9-12 μ, generalmente superficiali, bruno-fuliginee: queste presentano per lo più dei setti ravvicinati, degli articoli rigonfi, s'intrecciano e si saldano a formare dei minuti ammassi stromatici o sclerozi che si vogliano chiamare, ora costituiti da poche cellule rotondeggianti o poligonali, ora invece occupanti un'intera cellula peridermica. Questi stromi sono ora affatto superficiali, ora annidati parzialmente o totalmente nel lume delle cellule peridermiche esterne. Anche le ife miceliche più sottili possono, benchè più di rado, intrecciarsi, rigonfiare e saldare i loro articoli a formare di questi minuscoli stromi. I conidiofori s'innalzano tanto isolatamente dalle ife miceliche scorrenti alla superficie, quanto a cespuglietti dagli ammassi stromatici. Essi sono cilindrici, eretti settati, nero-olivacei o fuliginei, hanno un'altezza assai variabile, che va dai 220 ai 450 μ, ma per lo più misurano 250-350 × 6, 5-8. Queste misure si avvicinano a quelle date da Zukal (250-350 × 4-8) e da Massee (lunghezza fino a 400 μ), mentre sono un po' inferiori a quelle date da Harz e da Appel e Laubert (500 μ circa). La base dei conidiofori presenta spessissimo un rigonfiamento più o meno pronunciato, di 9 a 12 μ di diametro.

I conidi hanno una forma che varia tra l'obpiriforme e l'obclavata (questa è più frequente) a seconda che sono più o meno allungati. Essi sono dapprima nero-olivacei, più tardi bruno-fuliginei, possiedono un episporio molto grosso e presentano 5-8, per lo più 5-6 setti. Misurano 25-60 × 7-10, ma le dimensioni più frequenti sono 40-50 × 8-9,5.

Riguardo all'importanza patogena di questa demaziacea, non tutti gli autori che l'hanno studiata sono d'accordo. Secondo il Frank, il micelio potrebbe penetrare anche negli strati amiliferi, intaccare i granuli d'amido e produrre un vero marciume delle patate; il Massee ed il Clinton dicono che esso produce delle depressioni e un marciume secco (dry rot). Appel e Laubert ed Eichinger, invece, affermano che il fungo è del tutto superficiale e incapace di intaccare l'amido.

Per parte mia ho osservato che il micelio invade le cellule peridermiche a parete suberizzata, ma non ho mai potuto rintracciarlo negli strati amiliferi sottostanti. Ritengo molto probabile che il fungo si sviluppi soprattutto

a spese della membrana suberificata delle cellule della buccia: ciò è confermato dal fatto che i primi abbozzi degli ammassi stromatici sono quasi sempre addossati alla parete cellulare; essi crescono dalla periferia verso l'interno e finiscono generalmeute per riempire totalmente il lume cellulare e forse anche per fare screpolare la membrana. Certo si è che nelle aree invase dal fungo la buccia presenta numerosissime minute spaccature, le quali facilitano certamente la penetrazione di altri parassiti più potenti. È probabilmente solo dopo che questi hanno ucciso le cellule amilifere che il micelio dello *Spondylocladium* può invadere anche la polpa delle patate. Questa è, del resto, anche l'opinione di Appel e Laubert.

Tutto sommato, l'importanza patogena di questo fungillo sembra assai limitata e probabilmente solo in casi eccezionali puo assumere qualche gravità.

Come già ho accennato, non tutti i tuberi da me esaminati presentavano la forma conidica: alcuni di quelli tenuti semplicemente nel laboratorio senza aver subìto alcun trattamento, presentavano solo i minuscoli sclerozi; su quelli, invece, che erano stati trattati nel modo prima descritto ed erano tenuti in ambiente molto umido, si osservava un grande sviluppo di conidiofori, mentre gli sclerozi erano meno abbondanti e assai poco sviluppati. Evidentemente questi si formano principalmente quando le condizioni d'ambiente sono poco propizie e soprattutto quando scarseggia l'umidità; quando l'ambiente torna ad essere favorevole producono dei conidiofori con conidi che, trasportati dal vento, dall'acqua o dagli animali, diffondono la malattia.

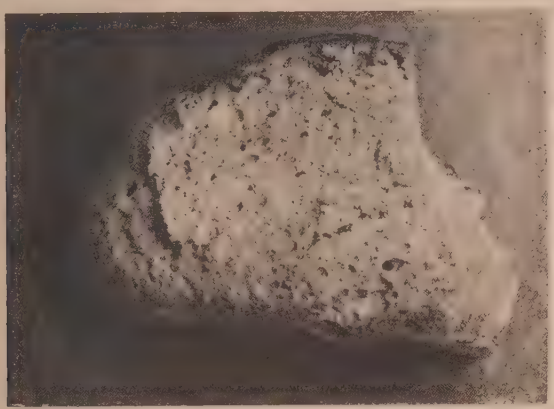
Non è il caso, per ora, di preoccuparci della presenza in Italia di questo fungillo abbastanza grazioso. Sarà sempre ottima cosa, in ogni modo, eliminare i tuberi presentanti le caratteristiche macchie punteggiate e all'occorrenza, ove la malattia dovesse assumere qualche gravità, evitare per qualche anno la coltura delle patate nei campi da cui essi provengono, poichè il terreno può esser rimasto infetto dagli sclerozi del fungo.

Il fatto che il micelio e gli stromi sono in parte immersi nella buccia ci spiega come il fungo abbia potuto svilupparsi sui tuberi, benchè trattati successivamente con sublimato corrosivo, alcool a 95° e acqua bollente! (1).

(1) Nello scorso Aprile, quando già questa Nota era pronta per la stampa, ho trovato lo *Spondylocladium atrovirens* su numerosi tuberi di patata anche a Riclaretto nelle Valli Valdesi del Piemonte.

Microbiologia — *Sopra una alterazione del pane prodotta da lievito infetto con Oospora variabilis*, Lindner. Nota di G. Ficai e R. Perotti (1), presentata dal Socio G. Cuboni.

Durante la esecuzione di alcune nostre ricerche nel Laboratorio consorziale di igiene e di agraria della provincia di Arezzo, nel giugno 1915, venne presentato all'esame un campione di pane fortemente attaccato da un micete, in condizioni tali da esser reso entro breve tempo immangiabile.



L'alterazione del campione, di cui presentiamo, qui unita, la fotografia di una sezione, offriva un aspetto caratteristico, in quanto che il fungo tappezzava uniformemente ogni alveolo del pane con un abbondante velo di colore bianco-latte.

Fino dal primo esame microscopico del fungo si rilevò trattarsi di una specie appartenente al genere *Oospora*, che noi ci proponemmo di determinare, nonchè di studiare dal punto di vista biologico e colturale ed infine d'inoculare artificialmente nella pasta per riprodurre l'alterazione nel pane e stabilire le condizioni in cui essa potesse verificarsi.

Riuscimmo nello scopo prefissoci, e qui appresso riferiamo succintamente i risultati delle nostre ricerche.

I. Morfologia e riferimento sistematico. — Trattasi di conidi subglobosi od ellipsoidei, nucleati, di μ 1,5-4,5 × 1,5-3,5. Sono disposti in catene ramificate, molto facilmente scissili.

(1) Ricerche eseguite nel R. Laboratorio di batteriologia agraria di Roma e nel Laboratorio consorziale di igiene ed agraria di Arezzo.

La forma è riferibile alla specie *Oospora variabilis* Lindner (*Monilia variabilis*, Lind.) da lui rinvenuta su pane bagnato in Berlino (1).

La specie è nuova per l'Italia.

II. Proprietà biologiche e caratteri colturali. — In acqua peptonizzata, sia a 37° C., sia a temperatura ambiente, non si ha in fondo alla provetta che un minimo sviluppo, senza intorbidamento del terreno colturale.

In brodo ordinario lo sviluppo è insignificante, come sopra. Il terreno rimane alcalino. In brodo saccarato si ottiene un tenue sviluppo in fondo alla provetta ove si nota, dopo 24^h di termostato a 37° C., un deposito granuloso, biancastro, fioccoso e polverulento. Il terreno non s'intorbida e rimane alcalino.

Le colture in brodo saccarosato, lasciate per tre mesi chiuse in un armadio alla temperatura ambiente, sono poi rigogliosissime. Non si osserva intorbidamento, ma pellicola bianco-lattea in superficie e sedimento fioccoso, bianco, abbondantissimo. Non si ha sviluppo di gas.

In brodo lattosato lo sviluppo è abbondante in superficie, ove si osserva un ammasso fioccoso, abbastanza compatto, biancastro. Con lo scuotimento si distaccano fiocchi che cadono al fondo. Il terreno rimane alcalino: nessuno sviluppo di gas.

In brodo glucosato si ottiene abbondante sviluppo della colonia in superficie, ove si osserva un ammasso fioccoso, biancastro, compatto. Il terreno sottostante rimane limpido. Si osserva evidente sviluppo di gas, e il terreno da alcalino è divenuto acido.

Su gelatina ordinaria si ha assenza di sviluppo, o quasi. Le colture, lasciate in armadio a temperatura ambiente, si sono mostrate bene sviluppate lungo il tramite d'infissione, senza fluidificazione.

Su agar ordinario e su agar di albumosa lo sviluppo fu nullo o quasi

Invece, su agar di fagioli fu abbondante, rapido, esuberante. Le colonie, piccole, rotonde, con il centro sollevato, hanno superficie rugosa, bianca asciutta; i margini, ne sono filamentosi, stellati e, ad un piccolo ingrandimento, risultano costituiti da un intreccio di filamenti che si ramificano dicotomicamente. Con il tempo le colonie divengono confluenti, rigogliose e si conservano bianche alla periferia, leggermente roseo-arancio pallido al centro.

Su patata semplice o glicerinata lo sviluppo, rigoglioso, abbondante, rapido, dà luogo in superficie ad un intonaco asciutto, rugoso a margini finamente radiati, di aspetto d'intonaco di calce. Con l'invecchiare delle colture, non si ha sviluppo di pigmento.

(1) Rabenhorst L., *Die Pilze Deutschlands, Oesterreichs u. der Schweiz*, VIII Abt., pag. 34.

Concludiamo, adunque, come l'ifomicete attacca fra gl'idrati di carbonio soltanto il glucosio con sviluppo di anidride carbonica e probabile formazione di acido lattico. Soltanto su agar di fagioli, dopo due o tre settimane, si sviluppa un pigmento roseo-arancio pallido.

III. Prove d'infezione. — Prima di tentare la riproduzione artificiale dell'alterazione del pane attraverso la via che i caratteri dell'infezione ci avevano fatto supporre la più verosimile, e, cioè, mediante lievito contenente oospora, abbiamo voluto determinare la temperatura di uccisione delle spore ed eseguire alcune prove d'infezione preliminari.

In tubetti sterilizzati si posero 2 cmc. di abbondante sospensione in soluzione fisiologica delle colonie sviluppate su agar di fagioli. I tubetti si tennero per 20 minuti alle temperature di + 150°, 130°, 120°, 110°, 100° C.

Le prime due prove furono fatte in stufa a secco e dimostrarono che a tale temperatura l'ifomicete è ucciso. Le prove a + 120° e + 110° C. furono fatte in autoclave ed anche a questa temperatura i conidi rimasero uccisi. La prova a + 100° C. fu fatta a vapore fluente e si ebbero i risultati del seguente prospetto, dove, in funzione della temperatura (T) e della sua durata (t), + + + indica conidi vivi; — — — indica conidi morti.

T	t	Risultati	Controlli
100° C	5′	+ + +	+ + +
100° »	10′	— — —	+ + +
100° »	20′	— — —	+ + +
100° »	30′	— — —	+ + +
100° »	60′	— — —	+ + +

Su fette di pane ordinario, poste entro scatole Petri grandi e sterilizzate in autoclave a + 115° C. per 20′, fu seminato l'ifomicete, il quale si sviluppò rigogliosamente alla temperatura ordinaria, con aspetto però differente da quello su agar di fagioli. La superficie di sezione del pane si viene, poco a poco, rivestendo di un intonaco uniforme, bianco che fa rassomigliare il pane ad *un pezzo di pomice bianca spugnosa*, oppure ad un *intonaco di gesso* aderente alla mollica. Nessuno sviluppo si osserva sulla crosta od in vicinanza, ove la colonia bruscamente si arresta.

Lo sviluppo nel pane avviene uniformemente in superficie, senza sollevamenti, cosicchè la colonia sviluppandosi s'insinua negli alveoli del pane, li tappezza, rimonta alla superficie e continua così negli alveoli contigui.

IV. Riproduzione artificiale dell'alterazione. — Queste ricerche possiamo distinguerle in positive e negative: tanto le une, quanto le altre

ci hanno egregiamente servito per fissare le cause dell'alterazione da noi riscontrata e le condizioni nelle quali essa può verificarsi.

Prove negative. — Ad un chilo di pasta (farina ed acqua) si aggiunge il lievito necessario e s'impasta il tutto con 100 cmc. di acqua sterile nella quale è stata sospesa abbondante quantità di coltura, in modo da distribuire le spore uniformemente in tutta la pasta. Questa viene divisa in cinque panini di 100 gr. ciascuno ed in un pane da 500 gr. Dopo il necessario periodo di lievitazione i pani sono portati in forno e vi sono tenuti per quasi un'ora alla temperatura di oltre 150° C. (si tratta di un forno modello, sistema Stella). Dopo 24 e 48 ore si tagliano i pani, ma non si osserva alcuno sviluppo dell'ifomicete.

Due panini aperti dopo cinque giorni non dimostrano alcuno sviluppo. Il pane da 600 gr., dopo sei giorni, dà il medesimo risultato.

Prove positive. — Dopo eseguito l'impasto di una notevole quantità di farina, al momento in cui la pasta è frazionata in pani e innestata con lievito, s'inocula ogni pane di circa un chilo con 10-20 cmc. di emulsione acquosa di coltura di oospora, rimpastando accuratamente.

Il forno, riscaldato a fascine di legna, non era ad alta temperatura; ed il pane, dopo due ore di cottura, fu tolto in apparenza sufficientemente cotto, però con un contenuto in umidità, determinata 8 ore dopo lo sfornamento, del 38-42 %.

Di quattro pani, lasciati a sè, dopo tre giorni, in due l'oospora all'interno era bene sviluppata; negli altri due lo era discretamente a zone. Tutti i pani, lasciati a sè, si sono poi ricoperti della patina bianca.

Conclusione. — L'elevata temperatura del forno, la buona cottura, specialmente se trattasi di pani di piccolo peso, impediscono lo sviluppo di *O. variabilis*; mentre la cottura incompleta, che lascia un elevato contenuto di umidità, in forno non convenientemente riscaldato, specie con grossi pani, porta all'alterazione di questi per sviluppo di detto ifomicete.

I germi di questo si trovano nel lievito; e non v'ha dubbio che esso rappresenti il veicolo d'infezione nel caso da noi riscontrato ed illustrato.

Dovrà, quindi, porsi ogni cura nella buona conservazione del lievito e generalizzarsi l'uso nella panificazione di lieviti razionalmente preparati.

MEMORIE
DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

GIANNULI F. *Sulla Istopatologia della Nevroglia nella Sclerosi a Placche post-infettiva.* Pres dal Corrisp. Lo MONACO.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario MILLOSEVICH presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando le seguenti di Soci e Corrispondenti: TARAMELLI, *Descrizione geologica della Provincia di Pavia — La sabbia dell'isola di Sansego e le aspirazioni italiane nell'Adriatico*; GUARESCHI, *Storia della chimica. Petroli ed emanazioni terrestri e loro origine.* Fa poi particolare menzione del vol. 1° della *Ristampa delle opere pubblicate a cura della Fondazione G. W. Hooper per ricerche mediche.*

Il Socio REINA offre il n. 2 del *Bollettino* del Comitato glaciologico italiano, pubblicato sotto gli auspici della Società Italiana per il Progresso delle Scienze e del Club Alpino Italiano, e dà notizia dei lavori nel fascicolo stesso contenuti.

AFFARI DIVERSI

Il Presidente RÒITI presenta due pieghi suggellati, inviati dal prof. SALVATORE MALTESE e dal dott. GIUSEPPE TALLARICO, perchè siano conservati negli Archivi accademici.

E. M.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 6 maggio 1917.

Amodeo F. — Aritmetica generale ed algebra conforme ai programmi del Liceo moderno. Napoli, 1917. 8°. pp. 1-419.

Berlese A. — Leopoldo Chinaglia (Estr. dal « Redia », vol. XII, pp. 361-366). Firenze, 1917. 8°.

Bertolini A. — Prima nota di piante ancor inedite dell'erbario della Flora italica (Estr. dagli « Atti della Società italiana di scienze naturali », vol. LV, pp. 252-277). Pavia, 1917. 8°.

Bollettino del Comitato glaciologico italiano, n. 2. Roma, 1917. 8°. pp. 1-65.

Cerrolaza A. — Clave del Universo. (Ciencia y Filosofia). Avila, 1917. 8°. pp. 1-48.

Chinaglia L. — Revisione del gen. *Hydrazetes*. Berl. (Estr. dal « Redia », vol XII, pp. 343-359). Firenze, 1917. 8°.

Collected reprints from the George Williams Hooper Foundation for Medical Research. San Francisco, 1916. 8°. pp. 1-738.

Guareschi I. — Storia della chimica. XII: Petroli ed emanazioni terrestri e loro origine. Torino, 1917. 4°. pp. 1-175.

Leone S. — Il *Tracoma* nella provincia di Siracusa. Siracusa, 1916-17, 8°. pp. 1-17.

Passerini N. — Esperienze di alimentazione maidica sui maiali e sulle larve del *Tenebrio molitor* L. (Estr. dagli « Atti della R. Accademia dei Georgofili », vol. XIII, pp. 1-40). Firenze, 1916. 8°.

Putti V. — La chirurgia degli organi di movimento, vol. I. Bologna, 1917, 8°. pp. 1-159.

Taramelli T. — Descrizione geologica della provincia di Pavia. Novara, 1916. 4°. pp. 1-139.

Taramelli T. — La sabbia dell'isola di Sansego e le aspirazioni Italiane nell'Adriatico (Estr. dai « Rendiconti del R. Istituto lombardo di Scienze e lettere », vol. L, pp. 1-12). Milano, 1917. 8°.

Taramelli E. — Risultati di uno studio geologico della provincia di Pavia (Estr. dai « Rendiconti del R. Istituto lombardo di Scienze e lettere », vol. L, pp. 88-91). Milano, 1917. 8°.